115 學年度學科能力測驗
數學 B 考科
非選擇題滿分參考答案與評分原則

數學 B 的題型有選擇（填）與混合題或非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理論證過程，答題時應清楚表達如何依據題設進行推論，並詳細說明解題過程，且得到正確答案，方可得到滿分。若能清楚表達如何依據正確題設進行推論，並詳細說明解題過程，但最後未求出正確答案，會依據解題概念的完整性，酌給部分分數。若未能依據正確題設進行推論，或未能詳細說明解題過程，則不予給分。例如沒有解題過程；或利用錯誤推論；或使用不符合題設的數據作答，均不給分。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考，詳細評分原則說明與常見錯誤概念或解法，請參閱本中心將於 4 月 15 日出刊的第 351 期《選才電子報》。

115 學年度學科能力測驗數學 B 考科非選擇題各題的參考答案說明如下。

第 19 題

一、滿分參考答案：

設 $O(0,0)$、$A(8,0)$、線段 $\overline{OA}$ 中點為 $B(4,0)$。

【法一】

因為 $\overline{PO}=\overline{PA}$ 且 $\angle OPA=90^\circ$，所以 ΔOPA 是等腰直角三角形。

由題意知直線 OA 為 x 軸，得直線 PA 的斜率為 1，即直線 PA 為 L。

因 B 為 $\overline{OA}$ 中點，得 $\overline{OB}=4$，故 ΔOBP 亦為等腰直角三角形，因此圓心坐標為 $P(4,-4)$。

又 $\overline{OP}=\sqrt{4^2+(-4)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$，得圓方程式為 $(x-4)^2+(y+4)^2=32$。

【法二】

因為圓心 P 在直線 $x=4$ 上，令 P 的坐標為 $(4,a)$，其中 $a<0$。

由 $\overrightarrow{PA}\cdot\overrightarrow{PO}=(4,-a)\cdot(-4,-a)=0$，解得 $a=-4$，故圓心坐標為 $P(4,-4)$。

又 $\overline{OP}=\sqrt{4^2+(-4)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$，得圓方程式為 $(x-4)^2+(y+4)^2=32$。

計算直線 PA 的斜率為 $\dfrac{0-(-4)}{8-4}=1$，故直線 PA 即為 L。

【法三】

因為 L 的斜率為 1 且通過 $A(8,0)$，得 L 的方程式為 $y=x-8$。

由 $\begin{cases} x=4 \\ y=x-8 \end{cases}$，解得交點坐標為 $P'(4,-4)$。

因 $\angle OPA=90^\circ$，且點 P 落在 $\overline{OA}$ 的中垂線 $x=4$ 上，故直線 PA 與直線 $x=4$ 的夾角為 45°，即直線 PA 的斜率為 1，得圓心 $P=P'$。

由圓心坐標 $P(4,-4)$，得 $\overline{OP}=\sqrt{4^2+(-4)^2}=\sqrt{32}=4\sqrt{2}$，故圓方程式為 $(x-4)^2+(y+4)^2=32$。

二、評分原則：

$\boxed{\text{滿分}}$：**以下兩項均須正確**

1. 根據題意條件，正確說明點 P 在 L 上。

2. 根據題意條件，得甲星軌跡所在圓方程式為 $(x-4)^2+(y+4)^2=32$，且過程正確。

$\boxed{\text{部分給分}}$

以上解題過程部分正確。

$\boxed{\text{零分}}$

未作答或未符合部分給分原則。

第 20 題

一、滿分參考答案：

【法一】

圓心 P的坐標為 $(4,-4)$，得 $\overrightarrow{PQ}=(2-4,8-(-4))=(-2,12)$。

因為 $\overrightarrow{PR}$和 $\overrightarrow{PQ}$垂直，且長度相等，故 $\overrightarrow{PR}=(-12,-2)$ 或 $(12,2)$。

由 $\overrightarrow{PR}$是 $\overrightarrow{PQ}$逆時鐘旋轉 $90°$所得出的向量，故 $\overrightarrow{PR}=(-12,-2)$。

因此點 R 的坐標為 $(4,-4)+(-12,-2)=(-8,-6)$。

【法二】

因為直線 PQ 之斜率 $m_{PQ}=\dfrac{8-(-4)}{2-4}=-6$，且 $\overline{PQ}$垂直 $\overline{PR}$，所以直線 PR 之斜率 $m_{PR}=\dfrac{1}{6}$，得直線 PR 方程式為 $y+4=\dfrac{1}{6}(x-4)$。

由於 R 落在直線 PR 上，可設 R 坐標為 $(t,\dfrac{1}{6}(t-4)-4)$。圓心 P的坐標為 $(4,-4)$，根據題意 $\overline{PQ}=\sqrt{148}$，再由 $\overline{PQ}=\overline{PR}$ 得 $\sqrt{(t-4)^2+(\dfrac{1}{6}(t-4))^2}=\sqrt{148}$，

解得 $t=16$或 -8（由題意知 $t=16$ 不合）。以 $t=-8$ 代入，得 R 坐標為 $(-8,\dfrac{1}{6}(-8-4)-4)$

$=(-8,-6)$，因此 $\overrightarrow{PR}=(-8-4,-6-(-4))=(-12,-2)$。

二、評分原則：

滿分：以下兩項均須正確

1. 根據題意條件，得向量 $\overrightarrow{PR}=(-12,-2)$，且過程正確。
2. 根據題意條件，得點 R的坐標為 $R(-8,-6)$，且過程正確。

部分給分

以上解題過程部分正確。

零分

未作答或未符合部分給分原則。