

115 學年度學科能力測驗

數學 A 考科

非選擇題滿分參考答案與評分原則

數學 A 的題型有選擇（填）與混合題或非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理論證過程，答題時應清楚表達如何依據題設進行推論，並詳細說明解題過程，且得到正確答案，方可得到滿分。若能清楚表達如何依據正確題設進行推論，並詳細說明解題過程，但最後未求出正確答案，會依據解題概念的完整性，酌給部分分數。若未能依據正確題設進行推論，或未能詳細說明解題過程，則不予給分。例如沒有解題過程；或利用錯誤推論；或使用不符合題設的數據作答，均不給分。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考，詳細評分原則說明與常見錯誤概念或解法，請參閱本中心將於 4 月 15 日出刊的第 351 期《選才電子報》。

115 學年度學科能力測驗數學 A 考科非選擇題各題的參考答案說明如下。

第 19 題

一、滿分參考答案：

平面 $ABCD$ 的法向量平行於 $\vec{AB} \times \vec{AD} = (-5, 5, 5)$ ，即 $(1, -1, -1)$ 。

又 B 點坐標為 $(1, 2, 0)$ ，故平面 $ABCD$ 的方程式為 $(x-1)-(y-2)-(z-0)=0$ ，即 $x-y-z=-1$

二、評分原則：

滿分：以下兩項均須正確

1. 正確指出平面 $ABCD$ 的法向量平行於 $(-5, 5, 5)$ 。
2. 將 B 點坐標代入後，得到正確的平面方程式。

部分給分

未完整說明如何求得正確方程式，僅正確指出平面 $ABCD$ 的法向量平行於 $(-5, 5, 5)$ 。

零分

未作答或未符合部分給分原則。

第 20 題

一、滿分參考答案：

$$\vec{AP} \perp (\vec{AD} \times \vec{AP}) \text{ 且 } \vec{AP} \perp (\vec{AP} \times \vec{AB}), \text{ 故 } \vec{AP} // [(\vec{AD} \times \vec{AP}) \times (\vec{AP} \times \vec{AB})]$$

$$(-2, 0, -4) \times (6, -10, -8) = -20 \cdot (2, 2, -1), \text{ 即 } \vec{AP} // (2, 2, -1), \text{ 而 } |\vec{AP}| = 6, \text{ 故}$$

$$|\vec{AP}| = \pm(4, 4, -2), \text{ 所以平行六面體體積} = |\vec{AP} \cdot (\vec{AB} \times \vec{AD})| = |(4, 4, -2) \cdot (-5, 5, 5)| = 10$$

因一個封閉區域距一點最遠的距離必發生在邊界上。故僅需考量六面體上各頂點到 A 的距離。

不失一般性，設 $\vec{AP} = (4, 4, -2)$ 。

$$\text{而 } \vec{AB} // [(\vec{AB} \times \vec{AD}) \times (\vec{AP} \times \vec{AB})] = 10(1, -1, 2), \text{ 可設 } \vec{AB} = t(1, -1, 2),$$

$$\text{由題設 } \vec{AP} \times \vec{AB} = (4, 4, -2) \times t(1, -1, 2) = (6, -10, -8), \text{ 得 } t = 1, \text{ 即 } \vec{AB} = (1, -1, 2)。$$

$$\text{同理因 } \vec{AD} // [(\vec{AB} \times \vec{AD}) \times (\vec{AD} \times \vec{AP})] = -10(2, 3, -1), \text{ 可設 } \vec{AD} = s(2, 3, -1),$$

$$\text{由題設 } \vec{AD} \times \vec{AP} = s(2, 3, -1) \times (4, 4, -2) = (-2, 0, -4), \text{ 可得 } s = 1, \text{ 即 } \vec{AD} = (2, 3, -1)。$$

因此 $\vec{AC} = \vec{AB} + \vec{AD} = (3, 2, 1)$, $\vec{AS} = (6, 7, -3)$, $\vec{AQ} = (5, 3, 0)$, $\vec{AR} = (7, 6, -1)$, 計算向量長可知：

$$|\vec{AB}| = \sqrt{6}, \quad |\vec{AD}| = \sqrt{14}, \quad |\vec{AC}| = \sqrt{14}, \quad |\vec{AS}| = \sqrt{94}, \quad |\vec{AQ}| = \sqrt{34}, \quad |\vec{AR}| = \sqrt{86}, \text{ 故最長者為 } |\vec{AS}| = \sqrt{94}。$$

二、評分原則：

滿分：以下四項均須正確

1. 正確計算得到 \vec{AP} ；
2. 正確計算得平行六面體體積的值；

3. 正確計算得到 \vec{AB}, \vec{AD} ；

4. 可由 $\vec{AB}, \vec{AD}, \vec{AC}, \vec{AS}, \vec{AQ}, \vec{AR}$ 來判斷距 A 的最長距離為 $\sqrt{94}$ 。

部分給分

1. 正確方法求得 \vec{AP} ，但未能正確求得 \vec{AB}, \vec{AD} 。

2. 正確方法求得 \vec{AP} 與平行六面體體積的值，但未能正確求得 \vec{AB}, \vec{AD} 。

3. 正確方法求得平行六面體體積的值，但未能完成正確求得 $\vec{AP}, \vec{AB}, \vec{AD}$ 。

4. 能正確求得 $\vec{AP}, \vec{AB}, \vec{AD}$ ，正確方法求得平行六面體體積的值，但未能求得最長距離的值。

零分

未作答或未符合部分給分原則。