

# 114 學年度分科測驗

## 數學甲考科非選擇題評分原則

數學甲考科的題型有選擇、選填與混合題(含非選擇題)、非選擇題。114 學年度分科測驗數學甲考科的非選擇題共有 5 題，包含第 13、14、15、16、17 題。其中第 13、15 題為 4 分；第 14、17 題為 6 分；第 16 題為 2 分，總計 22 分。

非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理論證過程，答題時應清楚表達如何依據題設進行推論，並詳細說明解題過程，且得到正確答案，方可得到滿分。若能清楚表達如何依據正確題設進行推論，並詳細說明解題過程，但最後未求出正確答案，會依據解題概念的完整性，酌給部分分數。若未能依據正確題設進行推論，或未能詳細說明解題過程，則不予給分。例如沒有解題過程；或利用錯誤推論；或使用不符合題設的數據作答，均不給分。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。關於較詳細的考生解題錯誤概念或解法，請參見本中心將於 9 月 15 日出刊的第 349 期《選才電子報》。

114 學年度分科測驗數學甲考科非選擇題各大題的滿分參考答案說明如下：

### 第 13 題

一、滿分參考答案：

次數的期望值為  $\sum_{k=1}^{\infty} k \times \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \times \frac{2}{5}$  (或  $\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{k=1}^n k \times \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \times \frac{2}{5}$ )。

此為  $p = \frac{2}{5}$  的幾何分布，故次數的期望值為  $\frac{1}{p} = \frac{5}{2}$ 。

二、評分原則：

**滿分**：以下兩項均須正確

1. 根據題意所給條件，得出次數的期望值為  $\sum_{k=1}^{\infty} k \times \left(\frac{3}{5}\right)^{k-1} \times \frac{2}{5}$ ，且過程正確。

2. 根據題目所給條件，說明此為  $p = \frac{2}{5}$  的幾何分布，故得次數的期望值為

$$\frac{1}{p} = \frac{5}{2}。$$

**部分給分**

以上兩個解題過程部分正確。

**零分**

未作答或未符合部分給分原則。

### **第 14 題**

一、滿分參考答案：

方式一：求出花費金額期望值為  $300 \times \left(\frac{3}{5}\right)^2 + 225 \times \left(1 - \left(\frac{3}{5}\right)^2\right) = 252$  元

方式二：求出花費金額期望值為  $100 \times \frac{5}{2} = 250$  元

推得方式二需花費金額的期望值較低。

二、評分原則：

**滿分**：以下三項均須正確

根據題目所給條件，且有計算過程得出方式一所花費金額期望值為 252 元；

根據題目所給條件，且有計算過程得出方式二所花費金額期望值為 250 元；

推得方式二需花費金額的期望值較低。

**部分給分**

1. 方式一、方式二金額期望值的解題過程正確，但未能正確回答兩個期望值的大小關係。

2. 方式一、方式二金額期望值的解題過程部分正確。

**零分**

未作答或未符合部分給分原則。

## 第 15 題

一、滿分參考答案：

**法一：**

若  $a=0$ ，則  $f(x)=1 \geq 0$ 。

$f'(x)=6ax$ ，若  $a \neq 0$ ，只有在  $x=0$  時， $f(x)$  有極值。檢查  $f(0)=1-a \geq 0$ ，以及兩端點  $f(-1)=f(1)=1+2a \geq 0$ ，故推得在  $-1 \leq x \leq 1$ ， $f(x) \geq 0$  均成立。

**法二：**

若  $a=0$ ，則  $f(x)=1 \geq 0$ 。

若  $a \neq 0$ ，則  $f(x)$  圖形為頂點在直線  $x=0$  上的拋物線。

當  $0 < a \leq 1$ ，拋物線開口朝上， $f(x)$  在  $-1 \leq x \leq 1$  的最小值為  $f(0)=1-a \geq 0$ 。

當  $-\frac{1}{2} \leq a < 0$  時，拋物線開口朝下， $f(x)$  在  $-1 \leq x \leq 1$  的最小值為

$f(-1)=f(1)=1+2a \geq 0$ ，故推得在  $-1 \leq x \leq 1$ ， $f(x) \geq 0$  均成立。

**法三：**

當  $0 \leq a \leq 1$ ，因為  $3ax^2 \geq 0$ ，所以  $3ax^2 + (1-a) \geq 1-a \geq 0$ 。

當  $-\frac{1}{2} \leq a < 0$ ，因為  $3ax^2 \geq 3a$ ，所以  $3ax^2 + (1-a) \geq 1+2a \geq 0$ 。

故推得在  $-1 \leq x \leq 1$ ， $f(x) \geq 0$  均成立。

二、評分原則：

**滿分**

根據題意所給條件，證明當  $-1 \leq x \leq 1$  時， $f(x) \geq 0$  皆成立，且過程推論正確。

**部分給分**

1. 利用法一、法二推論時，寫出  $f(0)=1-a \geq 0$ 、 $f(1)=1+2a \geq 0$ 、 $f(-1)=1+2a \geq 0$ ，但未解釋為何僅需判斷這三個即可。
2. 分成  $0 \leq a \leq 1$  與  $-\frac{1}{2} \leq a < 0$  兩種情況討論，但僅證明其中一種情況。

零分

未作答或未符合部分給分原則。

### 第 16 題

一、滿分參考答案：

$$\int_{-1}^1 (3ax^2 + 1 - a) dx = ax^3 + (1-a)x \Big|_{-1}^1 = 2。$$

二、評分原則：

滿分

根據題意所給條件，證明 $\Gamma$ 的面積皆為 2，且解題過程正確。

零分

未作答或未達給分標準。

### 第 17 題

一、滿分參考答案：

$$\text{旋轉體體積 } V \text{ 為 } \int_{-1}^1 \pi(3ax^2 + 1 - a)^2 dx = \pi(9a^2 \frac{x^5}{5} + 2a(1-a)x^3 + (1-a)^2 x) \Big|_{-1}^1 = \frac{8}{5}\pi a^2 + 2\pi$$

，故 $V$ 會隨 $a$ 而改變，且在 $a=1$ 時有最大值 $\frac{18}{5}\pi$

二、評分原則：

滿分

1. 正確列出旋轉體體積 $V$ 為 $\int_{-1}^1 \pi(3ax^2 + 1 - a)^2 dx$ 。

2. 正確求得旋轉體體積 $V$ 為 $\frac{8}{5}\pi a^2 + 2\pi$ 。

3. 由 $\frac{8}{5}\pi a^2 + 2\pi$ 知 $V$ 會隨 $a$ 而改變，且在 $a=1$ 時有最大值 $\frac{18}{5}\pi$ 。

部分給分

上述解題過程部分正確。

零分

未作答或未符合部分給分原則。