113 學年度學科能力測驗數學 B 考科
非選擇題滿分參考答案與評分原則

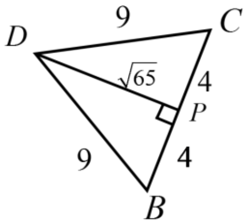
113 學科能力測驗數學 B 考科的非選擇題共有 2 題，其中第 19 題為 4 分；第 20 題為 8 分，總計 12 分。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理論證過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考，詳細評分原則說明與部分學生作答情形，請參閱本中心將於 4 月 15 日出刊的第 342 期《選才電子報》。

113 學年度學科能力測驗數學 B 考科非選擇題各題的參考答案說明如下：

第 19 題

一、滿分參考答案：



策略一：利用 ΔBCD 的面積 $=\frac{1}{2}\times\overline{BC}\times\overline{DP}$ 。

【法一】

設 P 為 $\overline{BC}$ 的中點。因為 $\overline{DP}=\sqrt{9^2-4^2}=\sqrt{65}$ ，

得 ΔBCD 的面積 $=\frac{1}{2}\times 8\times\sqrt{65}=4\sqrt{65}$ 。

策略二：利用三角形面積 $=\frac{1}{2}ab\sin C$ 。

【法二】

因為 $\sin\angle DBC=\sqrt{1-(\frac{4}{9})^2}=\frac{\sqrt{65}}{9}$ ，得 ΔBCD 的面積 $=\frac{1}{2}\times 9\times 8\times\frac{\sqrt{65}}{9}=4\sqrt{65}$ 。

【法三】

因為 $\cos\angle BDC=\frac{9^2+9^2-8^2}{2\times 9\times 9}=\frac{49}{81}$ ，得 $\sin\angle BDC=\sqrt{1-(\frac{49}{81})^2}=\frac{8\sqrt{65}}{81}$ 。

因此ΔBCD的面積$=\frac{1}{2}\times 9\times 9\times \frac{8\sqrt{65}}{81}=4\sqrt{65}$ 。

策略三：利用三角形面積$=\sqrt{s\times(s-a)\times(s-b)\times(s-c)}$ 。

【法四】

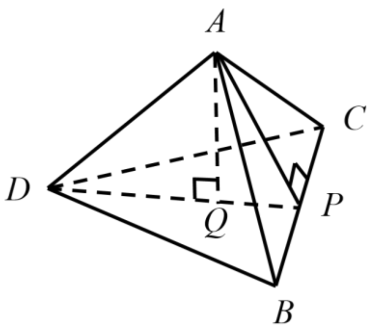
令$s=\frac{9+9+8}{2}=13$，得ΔBCD的面積$=\sqrt{13\times(13-9)\times(13-9)\times(13-8)}=4\sqrt{65}$ 。

二、評分原則：

1. 可採策略一，利用ΔBCD的底邊及推得其對應的高，求出ΔBCD的面積，且有正確的解題過程。
2. 可採策略二，利用ΔBCD的任意兩邊長及推得該兩邊長夾角的正弦值，求出ΔBCD的面積，且有正確的解題過程。
3. 可採策略三，利用ΔBCD的三邊長及面積公式，求出ΔBCD的面積，且有正確的解題過程。

第 20 題

一、滿分參考答案：



※求$\overline{AD}$的長度：

設P為$\overline{BC}$的中點，由$\overline{AD}\perp\overline{BC}$且$\overline{DP}\perp\overline{BC}$，得$\overline{AP}\perp\overline{BC}$，故$\overline{AB}=\overline{AC}$ 。

由題意知$\angle BAC$為直角，所以ΔABC為等腰直角三角形，得$\overline{AB}=\overline{AC}=4\sqrt{2}$ 。

故$\overline{AD}=\sqrt{9^2-(4\sqrt{2})^2}=7$ 。

（亦可設 $\overline{AD}=x$ 、 $\overline{AB}=y$ 、 $\overline{AC}=z$ ，由畢氏定理得 $\begin{cases} x^2+y^2=9^2 \\ x^2+z^2=9^2 \\ y^2+z^2=8^2 \end{cases}$ ，

推得 $y=z=4\sqrt{2}$ ，故 $\overline{AD}=x=\sqrt{9^2-(4\sqrt{2})^2}=7$ 。）

※求四面體 $ABCD$ 的體積：

四面體 $ABCD$ 的體積$=\dfrac{1}{3}\times\left(\dfrac{1}{2}\times4\sqrt{2}\times4\sqrt{2}\times7\right)=\dfrac{112}{3}$ 。

※求頂點 A 到底面 ΔBCD 高度的方法：

《以下列出三種求出頂點 A 到底面 ΔBCD 高度的方法》

【法一】利用四面體 $ABCD$ 的體積

頂點 A 到底面 ΔBCD 的高度$=\dfrac{\frac{112}{3}}{\frac{1}{3}\times4\sqrt{65}}=\dfrac{28}{\sqrt{65}}=\dfrac{28}{65}\sqrt{65}$ 。

【法二】利用 ΔAPD 面積

設頂點 A 在平面 BCD 的投影點為 Q 。因為 $\overline{AD}\perp\overline{BC}$ 且 $\overline{DP}\perp\overline{BC}$ ，

故 Q 必定落在 $\overline{DP}$ 。又 $\overline{DP}=\sqrt{65},\overline{AP}=4,\overline{AD}=7$ ，且 $\angle DAP$ 為直角，

所以頂點 A 到底面 ΔBCD 的高度$=\dfrac{\frac{1}{2}\times4\times7}{\frac{1}{2}\times\sqrt{65}}=\dfrac{28}{\sqrt{65}}=\dfrac{28}{65}\sqrt{65}$ 。

【法三】架空間坐標系，並利用點到平面方程式的距離公式

架空間坐標系，例如：設 A 為原點，且 $\overrightarrow{AC}$ 、 $\overrightarrow{AB}$ 、 $\overrightarrow{AD}$ 分別為 $+x$ 、 $+y$ 、 $+z$ 方向，得 $C(4\sqrt{2},0,0),B(0,4\sqrt{2},0),D(0,0,7)$ 。

故平面 BCD 的方程式為 $\dfrac{x}{4\sqrt{2}}+\dfrac{y}{4\sqrt{2}}+\dfrac{z}{7}=1$ ，化簡得 $7x+7y+4\sqrt{2}z=28\sqrt{2}$ 。

(亦可求平面BCD的法向量為

$\overrightarrow{BD}\times\overrightarrow{BC}=(0,-4\sqrt{2},7)\times(4\sqrt{2},-4\sqrt{2},0)=(28\sqrt{2},28\sqrt{2},32)=4\sqrt{2}(7,7,4\sqrt{2})$ 。

故平面BCD的方程式為$7x+7y+4\sqrt{2}z=28\sqrt{2}$ 。)

所以頂點A到底面ΔBCD的高度$=\dfrac{28\sqrt{2}}{\sqrt{7^2+7^2+(4\sqrt{2})^2}}=\dfrac{28}{65}\sqrt{65}$ 。

二、評分原則：

1.根據題意，能求出$\overline{AD}$長度與四面體$ABCD$的體積，且有正確的解題過程。

2.可利用不同方法求出頂點A到底面ΔBCD的高度：例如可利用四面體$ABCD$的體積；或利用ΔAPD的面積；或透過架設空間坐標系，利用空間中的點到平面的距離公式，且有正確的解題過程。