

財團法人大學入學考試中心基金會  
112學年度學科能力測驗試題

數學A考科

請於考試開始鈴響起，在答題卷簽名欄位以正楷簽全名

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正帶（液）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是  $\frac{\textcircled{18-1}}{\textcircled{18-2}}$ ，而依題意計算出來的答案是  $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答題卷上

的第 18-1 列的  $\square^3$  與第 18-2 列的  $\square^8$  劃記，如：

18-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>				
18-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若答案格式是  $\frac{\textcircled{19-1}\textcircled{19-2}}{50}$ ，而答案是  $\frac{-7}{50}$  時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列

的  $\square^-$  與第 19-2 列的  $\square^7$  劃記，如：

19-1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>						
19-2	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>					

選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有  $n$  個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有  $n$  個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯  $k$  個選項者，得該題  $\frac{n-2k}{n}$  的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有  $n$  個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

第壹部分、選擇（填）題（占85分）

一、單選題（占 30 分）

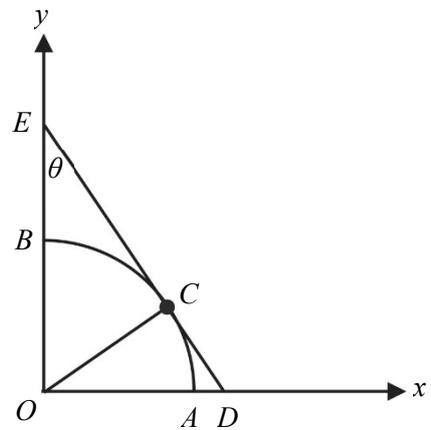
說明：第 1 題至第 6 題，每題 5 分。

1. 若在計算器中鍵入某正整數  $N$ ，接著連按「 $\sqrt{\quad}$ 」鍵（取正平方根）3 次，視窗顯示得到答案為 2，則  $N$  等於下列哪一個選項？

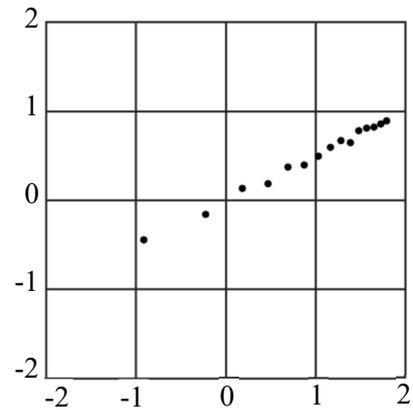
- (1)  $2^3$             (2)  $2^4$             (3)  $2^6$             (4)  $2^8$             (5)  $2^{12}$

2. 坐標平面上，以原點  $O$  為圓心、1 為半徑作圓，分別交坐標軸正向於  $A$ 、 $B$  兩點。在第一象限的圓弧上取一點  $C$  作圓的切線分別交兩軸於點  $D$ 、 $E$ ，如圖所示。令  $\angle OEC = \theta$ ，試選出為  $\tan \theta$  的選項。

- (1)  $\overline{OE}$   
(2)  $\overline{OC}$   
(3)  $\overline{OD}$   
(4)  $\overline{CE}$   
(5)  $\overline{CD}$



3. 某生推導出兩物理量  $s, t$  應滿足一等式。為了驗證其理論，他做了實驗得到 15 筆兩物理量的數據  $(s_k, t_k)$ ， $k=1, \dots, 15$ 。老師建議他將其中的  $t_k$  先取對數，在坐標平面上標出對應的點  $(s_k, \log t_k)$ ， $k=1, \dots, 15$ ，如圖所示；其中第一個數據為橫軸坐標，第二個數據為縱軸坐標。利用迴歸直線分析，某生印證了其理論。試問該生所得  $s, t$  的關係式最可能為下列哪一選項？



- (1)  $s = 2t$             (2)  $s = 3t$             (3)  $t = 10^s$             (4)  $t^2 = 10^s$             (5)  $t^3 = 10^s$

4. 將數字 1、2、3、...、9 等 9 個數字排成九位數（數字不得重複），使得前 5 位從左至右遞增、且後 5 位從左至右遞減。試問共有幾個滿足條件的九位數？

- (1)  $\frac{8!}{4!4!}$             (2)  $\frac{8!}{5!3!}$             (3)  $\frac{9!}{5!4!}$             (4)  $\frac{8!}{5!}$             (5)  $\frac{9!}{5!}$

5. 已知坐標空間中  $P$ 、 $Q$ 、 $R$  為平面  $2x - 3y + 5z = \sqrt{7}$  上不共線三點。

令  $\overrightarrow{PQ} = (a_1, b_1, c_1)$ ， $\overrightarrow{PR} = (a_2, b_2, c_2)$ 。試選出下列行列式中絕對值為最大的選項。

$$(1) \begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$(2) \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$(3) \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$(4) \begin{vmatrix} -1 & -1 & 1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

$$(5) \begin{vmatrix} -1 & -1 & -1 \\ a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \end{vmatrix}$$

6. 坐標空間中，考慮邊長為 1 的正立方體，固定一頂點  $O$ 。從  $O$  以外的七個頂點隨機選取相異兩點，設此兩點為  $P$ 、 $Q$ ，試問所得的內積  $\overrightarrow{OP} \cdot \overrightarrow{OQ}$  之期望值為下列哪一個選項？

$$(1) \frac{4}{7}$$

$$(2) \frac{5}{7}$$

$$(3) \frac{6}{7}$$

$$(4) 1$$

$$(5) \frac{8}{7}$$

## 二、多選題（占 30 分）

說明：第 7 題至第 12 題，每題 5 分。

7. 某公司有甲、乙兩新進員工，兩人同時入職且起薪相同。公司承諾給甲、乙兩員工調薪的方式如下：

甲：工作滿 3 個月，下個月開始月薪增加 200 元；以後再每滿 3 個月皆依此方式調薪。

乙：工作滿 12 個月，下個月開始月薪增加 1000 元；以後再每滿 12 個月皆依此方式調薪。

根據以上敘述，試選出正確的選項。

(1) 甲工作滿 8 個月後，第 9 個月的月薪比第 1 個月的月薪增加 600 元

(2) 工作滿一年後，第 13 個月甲的月薪比乙的月薪高

(3) 工作滿 18 個月後，第 19 個月甲的月薪比乙的月薪高

(4) 工作滿 18 個月時，甲總共領到的薪水比乙總共領到的薪水少

(5) 工作滿兩年後，在第 3 年的 12 個月中，恰有 3 個月甲的月薪比乙的月薪高

8. 某抽獎遊戲單次中獎機率為 0.1，每次中獎與否皆為獨立事件。對每一正整數  $n$ ，令  $p_n$  為玩此遊戲  $n$  次至少中獎 1 次的機率。試選出正確的選項。

- (1)  $p_{n+1} > p_n$
- (2)  $p_3 = 0.3$
- (3)  $\langle p_n \rangle$  為等差數列
- (4) 玩此遊戲兩次以上，第一次未中獎且第二次中獎的機率等於  $p_2 - p_1$
- (5) 玩此遊戲  $n$  次且  $n \geq 2$  時，至少中獎 2 次的機率等於  $2p_n$

9. 設  $a_1, a_2, a_3, \dots, a_n$  是首項為 3 且公比為  $3\sqrt{3}$  的等比數列。試選出滿足不等式

$$\log_3 a_1 - \log_3 a_2 + \log_3 a_3 - \log_3 a_4 + \dots + (-1)^{n+1} \log_3 a_n > 18$$

的項數  $n$  之可能選項。

- (1) 23
- (2) 24
- (3) 25
- (4) 26
- (5) 27

10. 考慮坐標平面上的直線  $L: 5y + (2k - 4)x - 10k = 0$  (其中  $k$  為一實數)，以及長方形  $OABC$ ，其頂點坐標為  $O(0,0)$ 、 $A(10,0)$ 、 $B(10,6)$ 、 $C(0,6)$ 。設  $L$  分別交直線  $OC$ 、直線  $AB$  於點  $D$ 、 $E$ 。試選出正確的選項。

- (1) 當  $k=4$  時，直線  $L$  通過點  $A$
- (2) 若直線  $L$  通過點  $C$ ，則  $L$  的斜率為  $-\frac{5}{2}$
- (3) 若點  $D$  在線段  $\overline{OC}$  上，則  $0 \leq k \leq 3$
- (4) 若  $k = \frac{1}{2}$ ，則線段  $\overline{DE}$  在長方形  $OABC$  內部(含邊界)
- (5) 若線段  $\overline{DE}$  在長方形  $OABC$  內部(含邊界)，則  $L$  的斜率可能為  $\frac{3}{10}$

11. 坐標平面上，設  $A$ 、 $B$  分別表示以原點為中心，順時針、逆時針旋轉  $90^\circ$  的旋轉矩陣。設  $C$ 、 $D$  分別表示以直線  $x=y$ 、 $x=-y$  為鏡射軸的鏡射矩陣。試選出正確的選項。

- (1)  $A$ 、 $C$  將點  $(1,0)$  映射到同一點
- (2)  $A = -B$
- (3)  $C = D^{-1}$
- (4)  $AB = CD$
- (5)  $AC = BD$

12. 令  $f(x) = \sin x + \sqrt{3} \cos x$ ，試選出正確的選項。

- (1) 鉛直線  $x = \frac{\pi}{6}$  為  $y = f(x)$  圖形的對稱軸
- (2) 若鉛直線  $x = a$  和  $x = b$  均為  $y = f(x)$  圖形的對稱軸，則  $f(a) = f(b)$
- (3) 在區間  $[0, 2\pi)$  中僅有一個實數  $x$  滿足  $f(x) = \sqrt{3}$
- (4) 在區間  $[0, 2\pi)$  中滿足  $f(x) = \frac{1}{2}$  的所有實數  $x$  之和不超過  $2\pi$
- (5)  $y = f(x)$  的圖形可由  $y = 4\sin^2 \frac{x}{2}$  的圖形經適當（左右、上下）平移得到

### 三、選填題（占 25 分）

說明：第 13 題至第 17 題，每題 5 分。

13. 某間新開幕飲料專賣店推出果汁、奶茶、咖啡三種飲料，前 3 天各種飲料的銷售數量（單位：杯）與收入總金額（單位：元）如下表，例如第一天果汁、奶茶、咖啡的銷售量分別為 60 杯、80 杯與 50 杯，收入總金額為 12900 元。

已知同一種飲料每天的售價皆相同，則咖啡每杯的售價為 13-1 13-2 元。

	果汁（杯）	奶茶（杯）	咖啡（杯）	收入總金額（元）
第 1 天	60	80	50	12900
第 2 天	30	40	30	6850
第 3 天	50	70	40	10800

14. 設  $a, b$  為實數 (其中  $a > 0$ )，若多項式  $ax^2 + (2a+b)x - 12$  除以  $x^2 + (2-a)x - 2a$  所得

餘式為 6，則數對  $(a, b) = ( \textcircled{14-1} , \textcircled{14-2} \textcircled{14-3} )$ 。

15. 設  $O, A, B$  為坐標平面上不共線三點，其中向量  $\overrightarrow{OA}$  垂直  $\overrightarrow{OB}$ 。若  $C, D$  兩點在

直線  $AB$  上，滿足  $\overrightarrow{OC} = \frac{3}{5}\overrightarrow{OA} + \frac{2}{5}\overrightarrow{OB}$ 、 $3\overrightarrow{AD} = 8\overrightarrow{BD}$ ，且  $\overrightarrow{OC}$  垂直  $\overrightarrow{OD}$ ，則  $\frac{\overline{OB}}{\overline{OA}} = \frac{\textcircled{15-1}}{\textcircled{15-2}}$ 。

(化為最簡分數)

16. 令  $E: x+z=2$  為坐標空間中過三點  $A(2, -1, 0)$ 、 $B(0, 1, 2)$ 、 $C(-2, 1, 4)$  的平面。另有一點  $P$  在平面  $z=1$  上且其於  $E$  之投影點與  $A, B, C$  三點等距離。則點  $P$  與平面  $E$

的距離為  $\textcircled{16-1} \sqrt{\textcircled{16-2}}$ 。(化為最簡根式)

17. 坐標空間中有兩不相交直線  $L_1: \begin{cases} x=1+t \\ y=1-t \\ z=2+t \end{cases}$ ， $t$  為實數、 $L_2: \begin{cases} x=2+2s \\ y=5+s \\ z=6-s \end{cases}$ ， $s$  為實數，另

一直線  $L_3$  與  $L_1, L_2$  皆相交且垂直。若  $P, Q$  兩點分別在  $L_1, L_2$  上且與  $L_3$  之距離皆為 3，

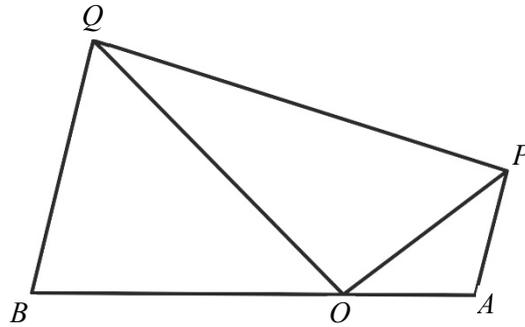
則  $P, Q$  兩點的距離為  $\textcircled{17-1} \sqrt{\textcircled{17-2}}$ 。(化為最簡根式)

第貳部分、混合題或非選擇題（占 15 分）

說明：本部分共有 1 題組，單選題每題 3 分，非選擇題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

18-20 題為題組

坐標平面上  $O$  為原點，給定  $A(1,0)$ 、 $B(-2,0)$  兩點。另有兩點  $P$ 、 $Q$  在上半平面，且滿足  $\overline{AP} = \overline{OA}$ 、 $\overline{BQ} = \overline{OB}$ 、 $\angle POQ$  為直角，如圖所示。令  $\angle AOP = \theta$ 。根據上述，試回答下列問題。



18. 線段  $\overline{OP}$  長為下列哪一選項？（單選題，3 分）

- (1)  $\sin \theta$       (2)  $\cos \theta$       (3)  $2\sin \theta$       (4)  $2\cos \theta$       (5)  $\cos 2\theta$

19. 若  $\sin \theta = \frac{3}{5}$ ，試求點  $Q$  的坐標，並說明  $\overrightarrow{BQ} = 2\overrightarrow{AP}$ 。（非選擇題，6 分）

20.（承 19 題）試求點  $A$  到直線  $BQ$  的距離，並求四邊形  $PABQ$  的面積。  
（非選擇題，6 分）

### 參考公式及可能用到的數值

1. 首項為  $a$ ，公差為  $d$  的等差數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為  $a$ ，公比為  $r$  ( $r \neq 1$ ) 的等比數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \cos A \sin B$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

$$\tan(A+B) = \frac{\tan A + \tan B}{1 - \tan A \tan B}$$

3.  $\triangle ABC$  的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$  ( $R$  為  $\triangle ABC$  外接圓半徑)

$\triangle ABC$  的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

4. 一維數據  $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，

算術平均數  $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$

標準差  $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \mu_X)^2 + (x_2 - \mu_X)^2 + \dots + (x_n - \mu_X)^2]} = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - n\mu_X^2]}$

5. 二維數據  $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$

相關係數  $r_{X,Y} = \frac{(x_1 - \mu_X)(y_1 - \mu_Y) + (x_2 - \mu_X)(y_2 - \mu_Y) + \dots + (x_n - \mu_X)(y_n - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

迴歸直線 (最適合直線) 方程式  $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{6} \approx 2.449, \pi \approx 3.142$

7. 對數值： $\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771, \log 5 \approx 0.6990, \log 7 \approx 0.8451$