

111 學年度分科測驗 數學甲考科非選擇題評分原則

數學甲考科的題型有選擇、選填與混合題(含非選擇題)、非選擇題。111 學年度分科測驗數學甲考科的非選擇題共有 5 題，包含第 13、14、15、16、17 題。其中第 13、15、16、17 題每題為 4 分；第 14 題為 6 分，總計 22 分。

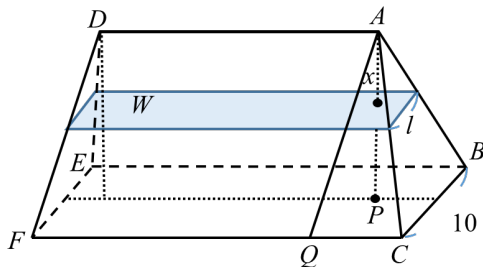
非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理論證過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。關於較詳細的考生解題錯誤概念或解法，請參見本中心將於 8 月 15 日出刊的第 332 期《選才電子報》。

111 學年度分科測驗數學甲考科非選擇題各大題的參考答案說明如下：

第 13 題

一、滿分參考答案：



W 與 $\triangle ABC, \triangle ACQ$ 所截邊長相等，設此邊長為 l ，由相似形可得 $\frac{l}{10} = \frac{x}{15}$ ，所以 $l = \frac{2x}{3}$ 。

所截矩形另一邊長為 $30 + l = 30 + \frac{2x}{3}$ ，所以矩形面積為 $\frac{2x}{3}(30 + \frac{2x}{3}) = 20x + \frac{4}{9}x^2$ 。

二、評分原則：

能否依據題意所給條件，以相似形求得矩形邊長，並證得矩形面積。

第 14 題

一、滿分參考答案：

1. 由 $\overline{P_0P_k} = \frac{15k}{n}$ ，與過 P_k 的水平面所截矩形面積為 $20\left(\frac{15k}{n}\right) + \frac{4}{9}\left(\frac{15k}{n}\right)^2$ ，再乘上高

$\frac{15}{n}$ ，得黎曼和 $\sum_{k=1}^n \left[20\left(\frac{15k}{n}\right) + \frac{4}{9}\left(\frac{15k}{n}\right)^2 \right] \frac{15}{n}$ 。

2. 體積的定積分式為 $\int_0^{15} \left(20x + \frac{4}{9}x^2 \right) dx$ 。

利用反導函數得積分值為 $\left(10x^2 + \frac{4}{27}x^3 \right) \Big|_0^{15} = 10 \times 15^2 + \frac{4}{27} \times 15^3 = 2750$ 。

二、評分原則：

能否由切片方法寫下估計積木體積的黎曼和，並能利用定積分表示積木體積，進而求得積木體積值。

第 15 題

一、滿分參考答案：

\vec{a} 、 \vec{b} 、 $\vec{a} - \vec{b}$ 所形成的三角形邊長分別為 x 、 $9-x$ 、 7 。

由餘弦定理得 $\cos \theta = f(x) = \frac{x^2 + (9-x)^2 - 7^2}{2x(9-x)} = \frac{x^2 - 9x + 16}{x(9-x)} = \frac{16}{9x-x^2} - 1$ ，

微分得 $f'(x) = \frac{-16(9-2x)}{(9x-x^2)^2}$ 。

二、評分原則：

能否正確操作餘弦定理並得出 $f(x)$ ，並以微分除法律求其導函數。

第 16 題

一、滿分參考答案：

法一：微分

由上題的 $f'(x)$ 可得：

當 $1 < x < \frac{9}{2}$ 時， $f'(x) < 0$ ，故此時 $f(x)$ 為遞減； $\frac{9}{2} < x < 8$ 時 $f'(x) > 0$ ，此時 $f(x)$ 為遞

增。

當 $x = \frac{9}{2}$ 時， $f'(x) = 0$ ， $f(x) = \cos \theta$ 有最小值，此時夾角 θ 為最大。

法二：配方法

由上題的 $f(x) = \frac{16}{9x-x^2} - 1$ ，其中 $\frac{16}{9x-x^2}$ 的分子為常數，將分母配方得

$$9x - x^2 = -(x - \frac{9}{2})^2 + \frac{81}{4},$$

當 $1 < x < \frac{9}{2}$ 時，分母遞增，此時 $f(x)$ 為遞減； $\frac{9}{2} < x < 8$ 時，分母遞減，此時 $f(x)$ 為遞增。

當 $x = \frac{9}{2}$ 時，分母有最大值， $f(x) = \cos \theta$ 有最小值。此時夾角 θ 為最大。

二、評分原則：

以一階微分 $f'(x)$ 的正負來說明 $f(x)$ 在哪個區域遞增、遞減，以說明 x 為多少時，夾角 θ 為最大。

第 17 題

一、滿分參考答案：

因為 5 在 4.96 附近且易於計算，所以是最合適的估計參考點。在 5 附近的一次估計為 $f(x) \approx f(5) + f'(5)(x-5)$ ，

由 $f(5) = -0.2$ 與 $f'(5) = 0.04$ ，可得 $f(4.96) \approx -0.2 + 0.04 \times (-0.04) = -0.2016$ 。

二、評分原則：

會寫出一次估計形式，並找到合理的估計參考點說明當 $x = 4.96$ 時， $\cos \theta$ 約為多少？