

# 財團法人大學入學考試中心基金會

## 111學年度學科能力測驗試題

### 數學B考科

#### —作答注意事項—

考試時間：100分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績並損及權益。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是  $\frac{\textcircled{18-1}}{\textcircled{18-2}}$ ，而依題意計算出來的答案是  $\frac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答題卷上

的第 18-1 列的  $\frac{3}{\square}$  與第 18-2 列的  $\frac{\square}{8}$  劃記，如：

|      |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                          |                          |   |                          |                          |
|------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|---|--------------------------|--------------------------|
| 18-1 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 18-2 | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

例：若答案格式是  $\frac{\textcircled{19-1}\textcircled{19-2}}{50}$ ，而答案是  $\frac{-7}{50}$  時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列

的  $\frac{\square}{\square}$  與第 19-2 列的  $\frac{\square}{7}$  劃記，如：

|      |                          |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |                          |                                     |                          |                          |                          |   |                          |                          |
|------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|-------------------------------------|--------------------------|--------------------------|--------------------------|---|--------------------------|--------------------------|
| 19-1 | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |
| 19-2 | <input type="checkbox"/> | <input checked="" type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/>            | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> | - | <input type="checkbox"/> | <input type="checkbox"/> |

選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有  $n$  個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有  $n$  個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯  $k$  個選項者，得該題  $\frac{n-2k}{n}$  的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有  $n$  個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

第壹部分、選擇（填）題（占85分）

一、單選題（占 35 分）

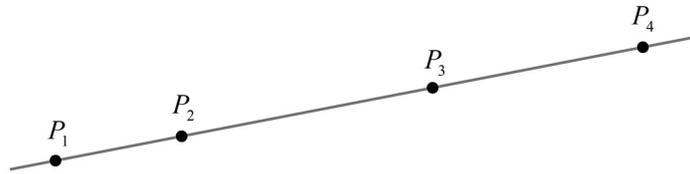
說明：第 1 題至第 7 題，每題 5 分。

- 試問有多少個整數  $x$  滿足  $2|x|+x < 10$  ?  
(1) 13 個            (2) 14 個            (3) 15 個            (4) 16 個            (5) 無窮多個
- 某燈會布置變色閃燈，每次啟動後的閃燈顏色會依照以下的順序做週期性變換：藍-白-紅-白-藍-白-紅-白-藍-白-紅-白...，每四次一循環，其中藍光每次持續 5 秒，白光每次持續 2 秒，而紅光每次持續 6 秒。假設換燈號的時間極短可被忽略，試選出啟動後第 99 至 101 秒之間的燈號。  
(1) 皆為藍燈  
(2) 皆為白燈  
(3) 皆為紅燈  
(4) 先亮藍燈再亮白燈  
(5) 先亮白燈再亮紅燈
- 有八棟大廈排成一列，由左至右分別編號 1,2,3,4,5,6,7,8。今電信公司想選取其中三棟大廈的屋頂分別設立一座電信基地台。若基地台不能設立於相鄰的兩棟大廈，以免訊號互相干擾，試問在 3 號大廈不設立基地台的情況下，有多少種設立基地台的選取方法？  
(1) 12            (2) 13            (3) 20            (4) 30            (5) 35
- 在坐標平面上，已知向量  $\overrightarrow{PQ} = \left( \log \frac{1}{5}, -10^{-5} \right)$ ，其中點  $P$  的坐標為  $\left( \log \frac{1}{2}, 2^{-5} \right)$ 。試選出正確的選項。  
(1) 點  $Q$  在第一象限  
(2) 點  $Q$  在第二象限  
(3) 點  $Q$  在第三象限  
(4) 點  $Q$  在第四象限  
(5) 點  $Q$  位於坐標軸上

5. 設矩陣  $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$ ，若  $A^7 - 3A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ ，則  $a+b+c+d$  之值為下列哪一個選項？
- (1) -8                      (2) -5                      (3) 5                      (4) 8                      (5) 10

6. 假設地球為一半徑  $r$  的球體，有一質點自甲地沿著該地所在經線往北移動，抵達北極點時移動所經過的弧線之長度為  $\frac{7}{12}\pi r$ 。試問哪一個選項最可能是甲地的位置？
- (1) 東經  $75^\circ$ 、北緯  $15^\circ$                       (2) 東經  $30^\circ$ 、南緯  $75^\circ$                       (3) 東經  $75^\circ$ 、南緯  $15^\circ$   
(4) 西經  $30^\circ$ 、北緯  $75^\circ$                       (5) 西經  $15^\circ$ 、南緯  $30^\circ$

7. 畫家把空間景物用單點透視法畫在平面的畫紙上時，有以下原則要遵守：
- 一、空間中的直線畫在畫紙上必須是一條直線。
  - 二、空間直線上點的相關位置必須和畫紙所畫的點的相關位置一致。
  - 三、空間直線上的任四個相異點的  $K$  值，和畫紙所畫的四個點之  $K$  值必須相同，其中  $K$  值的定義如下：直線上任給四個有順序的相異點  $P_1, P_2, P_3, P_4$ ，如下圖。



其所對應的  $K$  值定義為

$$K = \frac{\overline{P_1P_4} \times \overline{P_2P_3}}{\overline{P_1P_3} \times \overline{P_2P_4}}。$$

今某畫家依照以上原則，將空間中一直線及該線上的四相異點  $Q_1, Q_2, Q_3, Q_4$  描繪在畫紙上，其中  $\overline{Q_1Q_2} = \overline{Q_2Q_3} = \overline{Q_3Q_4}$ 。若將畫紙上所畫的直線視為一數線，並將線上的點用坐標來表示，則在下列選項的四個坐標中，試問哪一組最可能是該四點在畫紙上的坐標？

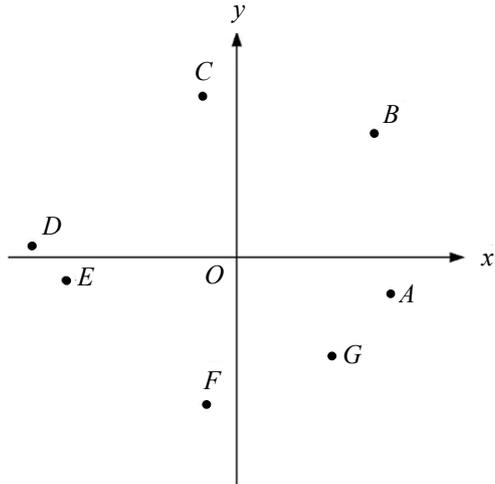
- (1) 1, 2, 4, 8  
(2) 3, 4, 6, 9  
(3) 1, 5, 8, 9  
(4) 1, 2, 4, 9  
(5) 1, 7, 9, 10

## 二、多選題（占 25 分）

說明：第 8 題至第 12 題，每題 5 分。

8. 有一射擊遊戲，將發射台設置於坐標平面的原點，並放置三個半徑為 1 的圓盤靶子，其圓心分別為  $(2,2)$ 、 $(4,6)$  與  $(8,1)$ 。玩家選定一正數  $a$ ，並按下按鈕後，發射台將向點  $(1,a)$  方向發射一道雷射光束（形成一射線）。假設雷射光束擊中靶子後可以穿透並繼續沿原方向前進（削過圓盤邊緣也視為擊中）。試選出正確的選項。
- (1) 雷射光束落在通過原點且斜率為  $a$  的直線上
  - (2) 若  $a = \frac{3}{2}$ ，則雷射光束會擊中圓心為  $(4,6)$  的圓盤靶子
  - (3) 玩家可以僅發射一道雷射光束就擊中三個圓盤靶子
  - (4) 玩家至少需要發射三道雷射光束才可擊中三個圓盤靶子
  - (5) 玩家發射一道雷射光束後，若擊中圓心為  $(8,1)$  的圓盤靶子，則  $a \leq \frac{16}{63}$
9. 設  $f(x) = 2x^3 - 3x + 1$ ，下列關於函數  $y = f(x)$  的圖形之描述，試選出正確的選項。
- (1)  $y = f(x)$  的圖形通過點  $(1,0)$
  - (2)  $y = f(x)$  的圖形與  $x$  軸只有一個交點
  - (3) 點  $(1,0)$  是  $y = f(x)$  的圖形之對稱中心
  - (4)  $y = f(x)$  的圖形在對稱中心附近會近似於一直線  $y = 3x - 3$
  - (5)  $y = 3x^3 - 6x^2 + 2x$  的圖形可由  $y = f(x)$  的圖形經適當平移得到
10. 甲、乙兩班各有 40 位同學參加某次數學考試（總分為 100 分），考試後甲、乙兩班分別以  $y_1 = 0.8x_1 + 20$  和  $y_2 = 0.75x_2 + 25$  的方式來調整分數，其中  $x_1, x_2$  分別代表甲、乙兩班的原始考試分數， $y_1, y_2$  分別代表甲、乙兩班調整後的分數。已知調整後兩班的平均分數均為 60 分，調整後的標準差分別為 16 分和 15 分。試選出正確的選項。
- (1) 甲班每位同學調整後的分數均不低於其原始分數
  - (2) 甲班原始分數的平均分數比乙班原始分數的平均分數高
  - (3) 甲班原始分數的標準差比乙班原始分數的標準差高
  - (4) 若甲班 A 同學調整後的分數比乙班 B 同學調整後的分數高，則 A 同學的原始分數比 B 同學的原始分數高
  - (5) 若甲班調整後不及格（小於 60 分）的人數比乙班調整後不及格的人數多，則甲班原始分數不及格的人數必定比乙班原始分數不及格的人數多

11. 考慮坐標平面上的點  $O(0,0)$ 、 $A$ 、 $B$ 、 $C$ 、 $D$ 、 $E$ 、 $F$ 、 $G$ ，如下圖所示：



其中  $B$  點、 $C$  與  $D$  點、 $E$  與  $F$  點、 $G$  與  $A$  點依序在一、二、三、四象限內。若  $\vec{v}$  為坐標平面上的向量，且滿足  $\vec{v} \cdot \vec{OA} > 0$  及  $\vec{v} \cdot \vec{OB} > 0$ ，則  $\vec{v}$  與下列哪些向量的內積一定小於 0？

- (1)  $\vec{OC}$       (2)  $\vec{OD}$       (3)  $\vec{OE}$       (4)  $\vec{OF}$       (5)  $\vec{OG}$

12. 設  $a, b, c$  都是非零的實數，且二次方程式  $ax^2 + bx + c = 0$  的兩根都落在 1 和 3 之間。試選出兩根必定都落在 4 和 5 之間的方程式。

- (1)  $a(x-2)^2 + b(x-2) + c = 0$       (2)  $a(x+2)^2 + b(x+2) + c = 0$   
 (3)  $a(2x-7)^2 + b(2x-7) + c = 0$       (4)  $a\left(\frac{x+7}{2}\right)^2 + b\left(\frac{x+7}{2}\right) + c = 0$   
 (5)  $a(3x-11)^2 + b(3x-11) + c = 0$

### 三、選填題（占 25 分）

說明：第 13 題至第 17 題，每題 5 分。

13. 若  $x, y$  為兩正實數，且滿足  $x^{\frac{-1}{3}}y^2 = 1$  及  $2 \log y = 1$ ，則  $\frac{x-y^2}{10} = \underline{\quad (13-1) \quad (13-2) \quad}$ 。

14. 坐標平面上有一個半徑為 7 的圓，其圓心為  $O$  點。已知圓上有  $A, B$  兩點，且  $\overline{AB} = 8$ ，則

$$\text{內積 } \vec{OA} \cdot \vec{OB} = \frac{\textcircled{14-1} \textcircled{14-2}}{\quad}。$$

15. 根據某國對失蹤輕航機的調查得知：失蹤輕航機中有 70% 後來會被找到，在被找到的輕航機當中，有 60% 裝設緊急定位傳送器；而沒被找到的失蹤輕航機當中，則有 90% 未裝設緊急定位傳送器。緊急定位傳送器會在飛機失事墜毀時發送訊號，讓搜救人員可以定位。現有一架輕航機失蹤，若已知該機有裝設緊急定位傳送器，則它會被找到的機率為

$$\frac{\textcircled{15-1} \textcircled{15-2}}{\textcircled{15-3} \textcircled{15-4}}。 \text{（化為最簡分數）}$$

16. 袋中有藍、綠、黃三種顏色的球共 10 顆。今從袋中隨機抽取兩顆球（每顆球被抽中的機率相等），若抽出的兩顆球皆為藍色的機率為  $\frac{1}{15}$ ，皆為綠色的機率為  $\frac{2}{9}$ ，則從袋中隨

$$\text{機抽出兩球，此兩球為相異顏色的機率為 } \frac{\textcircled{16-1} \textcircled{16-2}}{\textcircled{16-3} \textcircled{16-4}}。 \text{（化為最簡分數）}$$

17. 有三女三男共六位在校時和老師常有互動的同學，畢業後老師邀聚餐，餐後七人站一橫排照相留念。已知同學中有一女一男兩位曾有過不愉快，照相時不想相鄰，而老師站在正中間且三位男生不完全站在老師的同一側，則可能的排列方式共有

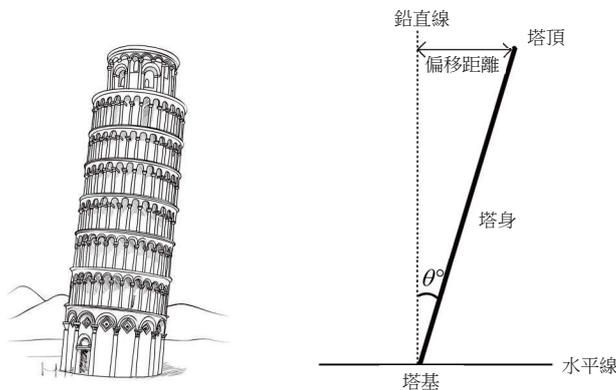
$$\frac{\textcircled{17-1} \textcircled{17-2} \textcircled{17-3}}{\quad} \text{種。}$$

第貳部分、混合題或非選擇題（占 15 分）

說明：本部分共有 1 題組，每一子題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

18-20 題為題組

瘦長的塔因為年代久遠，塔身容易傾斜。在下方右圖中，以粗黑線條代表塔身，而塔身的長度稱為**塔高**，塔身與鉛直虛線的夾角  $\theta^\circ$  稱為該塔的**傾斜度** ( $0 \leq \theta < 90$ )，又塔頂至鉛直虛線的距離稱為該塔的**偏移距離**。



根據上述資料，試回答下列問題。

18. 已知世界上傾斜度最高的摩天大樓坐落於阿布達比，其**傾斜度**達到  $18^\circ$ ，此**傾斜度**換算成徑（或弧度）為下列哪一個選項？（單選題，5 分）

- (1)  $\frac{\pi}{36}$       (2)  $\frac{\pi}{18}$       (3)  $\frac{\pi}{20}$       (4)  $\frac{\pi}{10}$       (5)  $\frac{\pi}{8}$

19. 中國虎丘塔、護珠塔與義大利的比薩斜塔是三座著名斜塔，它們的**塔高**分別為 48、19 與 57（公尺），**偏移距離**分別為 2.3、2.3 與 4（公尺），塔的**傾斜度**分別記為  $\theta_1^\circ$ 、 $\theta_2^\circ$  與  $\theta_3^\circ$ 。試比較  $\theta_1$ 、 $\theta_2$  與  $\theta_3$  三數的大小關係。（非選擇題，4 分）

20. 假設有塔高相等的兩座鐵塔，它們的**傾斜度**  $\alpha^\circ$ ， $\beta^\circ$  分別滿足  $\sin \alpha^\circ = \frac{1}{5}$  與  $\sin \beta^\circ = \frac{7}{25}$ 。

已知兩座鐵塔的**偏移距離**相差 20 公尺，試求它們的塔頂到地面之距離相差多少公尺。（非選擇題，6 分）

### 參考公式及可能用到的數值

1. 首項為  $a$ ，公差為  $d$  的等差數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$

首項為  $a$ ，公比為  $r$  ( $r \neq 1$ ) 的等比數列前  $n$  項之和為  $S = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$

2.  $\triangle ABC$  的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$  ( $R$  為  $\triangle ABC$  外接圓半徑)

$\triangle ABC$  的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C$

3. 一維數據  $X: x_1, x_2, \dots, x_n$ ，

算術平均數  $\mu_X = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \dots + x_n)$

標準差  $\sigma_X = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1 - \mu_X)^2 + (x_2 - \mu_X)^2 + \dots + (x_n - \mu_X)^2]} = \sqrt{\frac{1}{n}[(x_1^2 + x_2^2 + \dots + x_n^2) - n\mu_X^2]}$

4. 二維數據  $(X, Y): (x_1, y_1), (x_2, y_2), \dots, (x_n, y_n)$ ，

相關係數  $r_{X,Y} = \frac{(x_1 - \mu_X)(y_1 - \mu_Y) + (x_2 - \mu_X)(y_2 - \mu_Y) + \dots + (x_n - \mu_X)(y_n - \mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

迴歸直線（最適合直線）方程式  $y - \mu_Y = r_{X,Y} \frac{\sigma_Y}{\sigma_X} (x - \mu_X)$

5. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414, \sqrt{3} \approx 1.732, \sqrt{5} \approx 2.236, \sqrt{6} \approx 2.449, \pi \approx 3.142$

6. 對數值： $\log 2 \approx 0.3010, \log 3 \approx 0.4771, \log 5 \approx 0.6990, \log 7 \approx 0.8451$