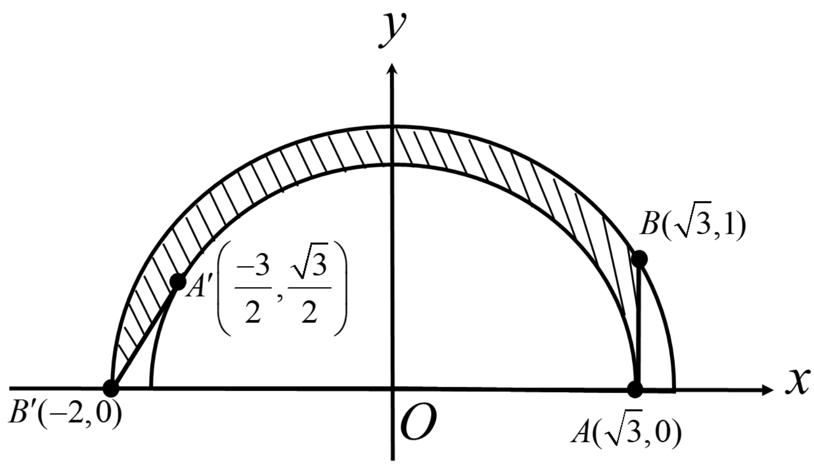
111 學年度學科能力測驗
數學 A 考科非選擇題評分原則

數學 A 的題型有選擇（填）與混合題或非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理論證過程。數學科非選擇題的解法通常不只一種，且有些解法並不屬於高中課程範圍，在此提供屬於高中課程，且多數考生可能採用的解法以供各界參考。不管採取哪種解法，均需於答題卷上清楚表達推理或解題過程，且得到正確答案，方可得到滿分。若過程中列式正確，但計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。以下提供非選擇題參考答案，以及評分原則，至於學生的作答與無法得到滿分的情形，請參閱本中心將於 4 月 15 日出刊的第 330 期《選才電子報》。

第 19 題

一、滿分參考答案：

掃描棒掃過之區域圖形如下：



因為$\overline{OB'}=2$，$\overline{OA'}=\sqrt{3}$，$\overline{A'B'}=1$， 故$\cos\angle OA'B'=\cos\frac{\pi}{2}=0$

（也可由餘弦定理，或內積求得$\cos\angle OA'B'=0$）

因為$\angle B'OA'=\dfrac{\pi}{6}$，可知$\angle AOA'=\dfrac{5\pi}{6}$，$\overline{OA'}=\sqrt{3}$，點$A'$的極坐標表示為$\left[\sqrt{3},150^\circ\right]$

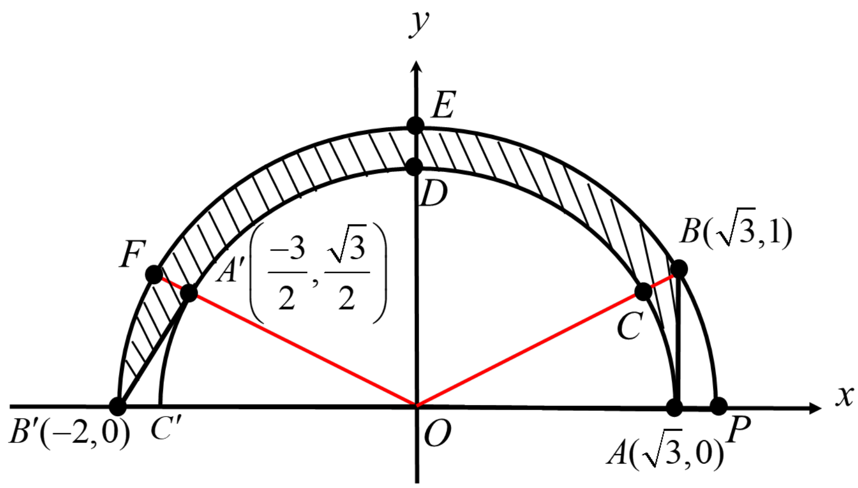
(或$\left[\sqrt{3},\dfrac{5\pi}{6}\right]$）。

二、評分原則：

根據題意，畫出掃描棒掃過的區域R，並藉由內積，或餘弦定理，或$\angle OA'B'$為直角，求出$\cos\angle OA'B'$及點A'的極坐標。

第 20 題

一、滿分參考答案：



如上圖，

(一)Ω的面積可由以下幾種解法求得：

【解法一】

Ω的面積$=$扇形OBE的面積$+\Delta OAB$的面積$-$扇形OAD的面積。

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{3}\times2^2+\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times1-\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times\sqrt{3}^2=\frac{2\pi}{3}+\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{3\pi}{4}$$

$$=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{12}$$

【解法二】

Ω的面積＝第一象限的環狀帶－（扇形OPB的面積$-\Delta OAB$的面積）

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times(2^2-\sqrt{3}^2)-(\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6}\times 2^2-\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 1)=\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{12}$$

(二) R的面積可由以下幾種解法求得：

【解法一】

第二象限的斜線面積＝第二象限的環狀帶－($\Delta OA'B'$的面積－扇形$OA'C'$的面積)

$$=\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{2}\times(2^2-\sqrt{3}^2)-(\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 1-\frac{1}{2}\times\frac{\pi}{6}\times\sqrt{3}^2)=\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

R的面積＝Ω的面積＋第二象限的面積＝$(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{12})+(\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{5\pi}{12}$

【解法二】

第二象限的斜線面積＝$DEFA'$環狀帶＋扇形OFB'的面積－$\Delta OA'B'$的面積

$$=\frac{2}{3}\times\frac{\pi}{4}\times(2^2-\sqrt{3}^2)+\frac{1}{3}\times\frac{\pi}{4}\times 2^2-\frac{1}{2}\times\sqrt{3}\times 1=\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2}$$

R的面積＝Ω的面積＋第二象限的面積＝$(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{\pi}{12})+(\frac{\pi}{2}-\frac{\sqrt{3}}{2})=\frac{5\pi}{12}$

【解法三】

在ΔOBA與$\Delta OB'A'$中，因$\overline{AB}=\overline{A'B'}$、$\overline{OB}=\overline{OB'}$、$\overline{OA}=\overline{OA'}$，可得$\Delta OBA\cong\Delta OB'A'$。

因$\angle BOA=\angle B'OA'$，故扇形OAC的面積＝扇形$OA'C'$的面積。

所以，ΔOBA－扇形OAC的面積＝$\Delta OB'A'$－扇形$OA'C'$的面積。

故R的面積＝扇形OBB'的面積－扇形OCC'的面積

$$=\frac{1}{2}\times\frac{5\pi}{6}\times 2^2-\frac{1}{2}\times\frac{5\pi}{6}\times\sqrt{3}^2=\frac{5\pi}{3}-\frac{5\pi}{4}=\frac{5\pi}{12}$$

二、評分原則：

能利用面積分割算出Ω與R的面積。