

大學入學考試中心
109 學年度指定科目考試試題（補考）
數學甲

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

- 作答方式：
- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
 - 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
 - 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
 - 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\frac{3}{\square}$ 與第 19 列的 $\frac{\square}{8}$ 畫記，如：

18	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="2"/>	<input checked="" type="text" value="3"/>	<input type="text" value="4"/>	<input type="text" value="5"/>	<input type="text" value="6"/>	<input type="text" value="7"/>	<input type="text" value="8"/>	<input type="text" value="9"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="-"/>	<input type="text" value="±"/>
19	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="2"/>	<input type="text" value="3"/>	<input type="text" value="4"/>	<input type="text" value="5"/>	<input type="text" value="6"/>	<input type="text" value="7"/>	<input checked="" type="text" value="8"/>	<input type="text" value="9"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="-"/>	<input type="text" value="±"/>

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\frac{\square}{\square}$ 與第 21 列的 $\frac{7}{\square}$ 畫記，如：

20	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="2"/>	<input type="text" value="3"/>	<input type="text" value="4"/>	<input type="text" value="5"/>	<input type="text" value="6"/>	<input type="text" value="7"/>	<input type="text" value="8"/>	<input type="text" value="9"/>	<input type="text" value="0"/>	<input checked="" type="text" value="-"/>	<input type="text" value="±"/>
21	<input type="text" value="1"/>	<input type="text" value="2"/>	<input type="text" value="3"/>	<input type="text" value="4"/>	<input type="text" value="5"/>	<input type="text" value="6"/>	<input checked="" type="text" value="7"/>	<input type="text" value="8"/>	<input type="text" value="9"/>	<input type="text" value="0"/>	<input type="text" value="-"/>	<input type="text" value="±"/>

第壹部分：選擇題 (單選題、多選題及選填題共占 76 分)

一、單選題 (占 18 分)

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇 (填) 題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 考慮兩個函數 $f(x) = \begin{cases} 1+x, & x \leq 1 \\ 1, & x > 1 \end{cases}$ 、 $g(x) = \begin{cases} 1, & x \leq 1 \\ 3-x, & x > 1 \end{cases}$ 。關於函數的極限，試選

出正確的選項。

- (1) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在、 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ 存在、 $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x))$ 存在
- (2) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 存在、 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ 不存在、 $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x))$ 不存在
- (3) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在、 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ 存在、 $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x))$ 不存在
- (4) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在、 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ 不存在、 $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x))$ 存在
- (5) $\lim_{x \rightarrow 1} f(x)$ 不存在、 $\lim_{x \rightarrow 1} g(x)$ 不存在、 $\lim_{x \rightarrow 1} (f(x) + g(x))$ 不存在

2. 某質點在數線上移動，已知其位置坐標為 $s(t) = \int_0^t (-x^2 + 6x) dx$ ，其中 t 表時間且 $0 \leq t \leq 10$ 。若此質點的速度在時段 $0 \leq t < a$ 遞增，且在時段 $a < t \leq 10$ 遞減，試選出正確的 a 值。

- (1) 3
- (2) 4
- (3) 5
- (4) 6
- (5) 7

3. 在坐標平面上，其 x 坐標與 y 坐標都是整數的點稱為「格子點」。試問滿足方程式 $\log_2(x-1) = \log_4(25-y^2)$ 的格子點 (x, y) 共有幾個？
- (1) 4 個
 - (2) 5 個
 - (3) 6 個
 - (4) 8 個
 - (5) 12 個

二、多選題 (占 40 分)

說明：第 4 題至第 8 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇 (填) 題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

4. 設二階方陣 M 為在坐標平面上定義的線性變換， O 為原點。已知 M 可將不共線的三點 O 、 A 、 B 映射至不共線的三點 O 、 A' 、 B' ，試選出正確的選項。
- (1) M 為可逆矩陣
 - (2) 若 M 將點 C 映射至點 C' 且 $\overrightarrow{OC} = 2\overrightarrow{OA} + 3\overrightarrow{OB}$ ，則 $\overrightarrow{OC'} = 2\overrightarrow{OA'} + 3\overrightarrow{OB'}$
 - (3) $\angle AOB = \angle A'OB'$
 - (4) $\overline{OA} : \overline{OB} = \overline{OA'} : \overline{OB'}$
 - (5) $\Delta OA'B'$ 的面積 = ΔOAB 的面積 $\times |\det(M)|$

5. 下列選項中，試選出與 $\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$ 相乘之後會得到實數的選項。(註： $i = \sqrt{-1}$)

(1) $\cos \frac{\pi}{7} + i \sin \frac{\pi}{7}$

(2) $\cos \frac{\pi}{7} - i \sin \frac{\pi}{7}$

(3) $-\sin \frac{5\pi}{14} + i \cos \frac{5\pi}{14}$

(4) $\sin \frac{\pi}{7} + i \cos \frac{\pi}{7}$

(5) $\sin \frac{\pi}{7} - i \cos \frac{\pi}{7}$

6. 持續投擲一枚公正骰子，在過程中若出現連續兩次點數的和為 7 時，就停止投擲。例如：若前兩次投擲分別出現點數 1、4，點數和不等於 7，所以繼續投擲；若第三次投出點數 3，因為第二次與第三次點數和為 7，所以此時即停止投擲。關於此機率事件，試選出正確的選項。

(1) 在第一次投擲的點數為 6 的情況下，總共投擲兩次就停的機率為 $\frac{1}{6}$

(2) 總共投擲兩次就停止的機率為 $\frac{1}{6}$

(3) 在第一次投擲的點數為 5 的情況下，總共投擲三次恰好停止的機率為 $\frac{1}{6}$

(4) 總共投擲三次恰好停止的機率大於 $\frac{1}{6}$

(5) 至少投擲三次才停止的機率為 $\frac{1}{2}$

7. 關於非常數的實係數多項式函數 $f(x)$ ，試選出正確的選項。

- (1) 若 $f(1)f(2) < 0$ ，則存在 $c \in (1, 2)$ 滿足 $f(c) = 0$
- (2) 若 $f(1)f(2) > 0$ ，則對任意的 $c \in (1, 2)$ ， $f(c) \neq 0$ 均成立
- (3) 若 $f(1)f(2)f(3) < 0$ ，則存在 $c \in (1, 3)$ 滿足 $f(c) = 0$
- (4) 若 $\left(\int_0^1 f(x) dx\right)\left(\int_0^2 f(x) dx\right) < 0$ ，則存在 $c \in (1, 2)$ 滿足 $\int_0^c f(x) dx = 0$
- (5) 若 $\int_1^2 f(x) dx = 0$ ，則 $f(1)f(2) < 0$

8. 設 a, b, c 為三實數，且 $a > b > c$ 。已知 $2^a, 2^b, 2^c$ 三數依序成等差數列。試選出正確的選項。

- (1) a, b, c 三數依序成等比數列
- (2) $2^{a+100}, 2^{b+100}, 2^{c+100}$ 三數依序成等差數列
- (3) $4^a, 4^b, 4^c$ 三數依序成等差數列
- (4) $a < b + 1$
- (5) $b \geq \frac{a+c}{2}$

三、選填題 (占 18 分)

說明：1. 第 A 至 C 題，將答案畫記在答案卡之「選擇 (填) 題答案區」所標示的列號 (9-16)。

2. 每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 不透明箱內有 4 顆紅球，8 顆藍球與 13 顆白球。隨機同時抽取 2 球 (每顆球被抽到的機率相等)，若抽出的兩球同色，可得獎金 450 元；若抽出的兩球異色，可得獎金 75 元。則隨機同時抽取 2 球的獎金期望值為 ⑨⑩⑪ 元。

B. 在坐標平面上，一圓心在 y 軸正向上的圓，與直線 $y = mx$ 相切，其中 $m > 0$ 。若此圓圓心與 x 軸的距離和切點與 x 軸的距離之比值為 5，則 $m = \frac{\textcircled{12}}{\textcircled{13}}$ 。(化成最簡分數)

C. 等腰三角形 ABC 中，令 $\theta = \angle BAC$ 。若 $\overline{AB}^2 = \overline{AC}^2 = \overline{BC} = \sin \theta$ ，則三角形 ABC 的面積為 $\frac{\textcircled{14}}{\textcircled{15}\textcircled{16}}$ 。(化成最簡分數)

第貳部分：非選擇題 (占 24 分)

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號(一、二)與子題號((1)、(2)、……)，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。若因字跡潦草、未標示題號、標錯題號等原因，致評閱人員無法清楚辨識，其後果由考生自行承擔。每一子題配分標於題末。

- 一. 坐標空間中，設 E 為過原點且由向量 $\vec{u} = (2, 0, 1)$ 、 $\vec{v} = (0, 1, 1)$ 所張出的平面。將空間中兩點 A 、 B 垂直投影到平面 E 上，所得投影點依序為 A' 、 B' 兩點。已知 $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{u} = 5$ 、 $\overrightarrow{AB} \cdot \vec{v} = 2$ ，試回答下列問題。
- (1) 若平面 E 方程式為 $x + by + cz = d$ ，試求實數 b, c, d 之值。(4 分)
 - (2) 試證明 $\overrightarrow{A'B'} \cdot \vec{u} = \overrightarrow{AB} \cdot \vec{u}$ 。(2 分)
 - (3) 若 $\overrightarrow{A'B'} = \alpha \vec{u} + \beta \vec{v}$ ，試求實數 α, β 之值。(6 分)

背面還有試題

二. 設 $f(x) = x^3 + bx^2 + cx + d$ 為三次實係數多項式函數。已知 $f'(x)$ 是 $f(x)$ 的因式，試回答下列問題。

(1) 若 $f(x) = \frac{1}{3}f'(x)(x+k)$ ，其中 k 為實數，試求出 b (以 k 的數學式表示)。(4 分)

(2) 試證明 $f'(x) = 0$ 有重根。(4 分)

(3) 若知 $f(-1) = 0$ ，試求積分 $\int_0^1 f(x) dx$ 之值。(4 分)