109學年度指定科目考試(補考)
數學甲考科非選擇題參考答案

數學甲的題型有選擇、選填與非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理論證過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。

109學年度指定科目考試(補考)數學甲考科非選擇題各大題的參考答案說明如下：

第一題

第(1)小題（4分）

$(2,0,1)$ 與 $(0,1,1)$ 做外積得平面法向量為 $(-1,-2,2)$。

因為通過原點，所以平面 E 的方程式為 $x+2y-2z=0$，

即 $b=2$、$c=-2$、$d=0$。

第(2)小題（2分）

因為 $\overrightarrow{A'B'}=\overrightarrow{A'A}+\overrightarrow{AB}+\overrightarrow{BB'}$，又 $\overrightarrow{A'A}$ 與 $\overrightarrow{u}$ 垂直，$\overrightarrow{BB'}$ 與 $\overrightarrow{u}$ 垂直，所以

$$\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{A'A}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{u}+\overrightarrow{BB'}\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{u}$$

第(3)小題（6分）

由(2)同理可得 $\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{v}=\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{v}$；因此

$5=\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{u}=\alpha(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u})+\beta(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{u})$ 且 $2=\overrightarrow{A'B'}\cdot\overrightarrow{v}=\alpha(\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v})+\beta(\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v})$。

又 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{u}=5$、$\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v}=2$、$\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=1$

解聯立方程組 $\begin{cases}5\alpha+\beta=5\\ \alpha+2\beta=2\end{cases}\Rightarrow \alpha=\dfrac{8}{9},\beta=\dfrac{5}{9}$。

第二題

第(1)(2)小題（各 4 分）

解法一

$f(x)=x^3+bx^2+cx+d$

$$=\frac{1}{3}f'(x)(x+k)=\frac{1}{3}(3x^2+2bx+c)(x+k)=x^3+(\frac{2}{3}b+k)x^2+(\frac{2}{3}bk+\frac{c}{3})x+\frac{c}{3}k$$

比較 x^2 項係數，得 $b=\frac{2}{3}b+k\Rightarrow k=\frac{b}{3}$，也就是 $b=3k$。

比較 x 項與常數項係數並將 $b=3k$ 代入得 $c=3k^2, d=k^3$。

因此

$$f(x)=(x+k)^3\Rightarrow f'(x)=3(x+k)^2 \text{。}$$

故 $f'(x)=0$ 有重根 $-k$。

解法二

因為 $f'(x)=\frac{1}{3}(f''(x)(x+k)+f'(x))$，所以 $f'(x)=\frac{1}{2}f''(x)(x+k)$，故 $-k$ 皆為 $f(x)=0$、$f'(x)=0$ 的根，即 $-k$ 為 $f(x)=0$ 的重根。

若 $\alpha\neq -k$ 為 $f(x)=0$ 的另一相異實根，由 $f(\alpha)=\frac{1}{3}f'(\alpha)(\alpha+k)=0$ 知 $f'(\alpha)=0$，即 α 也是 $f(x)=0$ 的重根。此與 $f(x)$ 為三次多項式相矛盾。故 $-k$ 為 $f(x)=0$ 的三重根。因此

$$f(x)=(x+k)^3 \text{，}$$

展開得 $b=3k$。

第(3)小題（4 分）

由 $f(-1)=0$，推得 $k=1$，即 $f(x)=(x+1)^3$，

所以 $\int_0^1\left(x^3+3x^2+3x+1\right)dx=\frac{1}{4}+1+\frac{3}{2}+1=\frac{15}{4}$。