

102 學年度指定科目考試數學乙非選擇題考生作答情形分析

第一處 陳慧美

每年指考成績單寄發後，有些考生認為自己的數學乙考科非選擇題，最後答案明明正確，為什麼無法得到該題的滿分，甚至 1 分未得？本文就此一疑問，說明本年度數學乙非選擇題僅得到部分題分或是 1 分未得的可能情形，以及數學科非選擇題給分的大原則，希望能藉此釐清部分考生的疑惑。以下各題會從兩方面進行分析，一是正確的解題步驟，二是考生解題的一些錯誤概念或解法。

第一題：

題目：已知 $\log 2 \approx 0.3010$ ， $\log 3 \approx 0.4771$ 。

- (1) 請以對數律計算 $\log 1.5$ （不必四捨五入）。（3 分）
- (2) 請以對數律計算 $\log (1.5)^{60}$ （不必四捨五入）。（3 分）
- (3) 請問 $(1.5)^{60}$ 的整數部分是幾位數？請說明理由。（3 分）
- (4) 請問 $(1.5)^{60}$ 的整數部分中，最左邊的數字是幾？請說明理由。（3 分）

分析：

本題評量對數律、首數與尾數的意義，試題分成 4 小題，逐步引導解題。

第(1)小題

(一) 正確解題步驟：

$$\log 1.5 = \log \frac{3}{2} = \log 3 - \log 2 \approx 0.4771 - 0.3010 = 0.1761$$

(二) 錯誤概念或解法：

此小題僅得部分分數或未得分的幾種情形如下：

(A1) 寫出正確的對數運算，但函數值計算錯誤，如：

$$\log 1.5 = \log \frac{3}{2} = \log 3 - \log 2 \approx 0.4771 - 0.3010 = 0.0761。$$

(A2)寫出錯誤的對數運算，如： $\log \frac{3}{2} = \frac{\log 3}{\log 2}$ 。

第(2)小題

(一) 正確解題步驟：

$$\log(1.5)^{60} = 60 \times \log 1.5 \approx 60 \times 0.1761 = 10.566$$

(二) 錯誤概念或解法：

此小題僅得部分分數或未得分的幾種情形如下：

(B1)寫出正確的對數運算，但函數值計算錯誤，如：

$$\log(1.5)^{60} = 60 \times \log 1.5 = 11.566。$$

(B2)寫出錯誤的對數運算，如： $\log(1.5)^{60} = 60 \times \log 0.5 = 60 \times (-0.3010)$ 。

第(3)小題

(一) 正確解題步驟：

因為 $\log(1.5)^{60}$ 的首數為10，所以 $(1.5)^{60}$ 的整數部分是 $10+1=11$ 位數。

(二) 錯誤概念或解法：

此小題僅得部分分數或未得分的幾種情形如下：

(C1)雖算出 $\log(1.5)^{60} = 10.566$ ，但不曉得整數部分的位數即為首數加1，如：

$\log(1.5)^{60}$ 的首數為10，所以 $(1.5)^{60}$ 的整數部分即為10位數；或因

$\log(1.5)^{60} = 10.566$ ，而認為整數部分為10，故為2位數。

(C2)雖曉得整數部分的位數即為首數加1，但算錯 $\log(1.5)^{60}$ 的數值。

第(4)小題

(一) 正確解題步驟：

因為 $\log(1.5)^{60}$ 的尾數為0.566，而 $\log 3 \approx 0.4771 < 0.566 < 0.6020 \approx \log 4$ ，所以 $(1.5)^{60}$ 的

整數部分中，最左邊的數字是 3。

(二) 錯誤概念或解法：

此小題僅得部分分數或未得分的幾種情形如下：

(D1)已寫出理由，但寫錯答案。如：因 $\log 3 \leq 0.566 < \log 4$ ，故最左邊的數字為 $\log 3$ ；或認為 0.566 最接近 $\log 4$ ，而得最左邊的數字為 4。

(D2)答案正確，但未說明理由。如：僅寫

$$\log(1.5)^{60} = 10.566 = 10 + 0.566 = 10 + \log 3. \sim, \text{ 卻未說明 } 0.566 \text{ 為何是 } \log 3. \sim。$$

本題屬高一數學指數、對數函數單元之試題，第(1)與(2)小題即評量考生能否利用對數計算求出 $\log 1.5$ 與 $\log(1.5)^{60}$ 之數值。在第(3)小題中，可由第(2)小題所得數值之首數，求得 $(1.5)^{60}$ 的整數部分是 $10+1=11$ 位數。在第(4)小題中，則利用第(2)小題所得數值之尾數，來判斷因 $\log 3 < 0.566 < \log 4$ ，故 $(1.5)^{60}$ 的整數部分中，最左邊的數字是 3。在第(4)小題中，若考生只寫答案，而未有任何的理由將無法得分。數學科非選擇題主要評量用數學式清楚表達解題過程的能力，因此推理過程與說明是否正確、邏輯判斷是否合理，均為評定分數的重要依據。

第二題：

題目：某工廠使用三種貴金屬元素合成兩種合金，其中每單位的甲合金是由 5 公克的 A 金屬、3 公克的 B 金屬以及 3 公克的 C 金屬組成，而每單位的乙合金是由 3 公克的 A 金屬、6 公克的 B 金屬與 3 公克的 C 金屬所組成。已知甲、乙合金每單位的獲利分別為 600、700 元。若工廠此次進了 1000 公克的 A 金屬、1020 公克的 B 金屬與 660 公克的 C 金屬投入生產這兩種合金，試問甲、乙兩種合金各應生產多少單位，才能獲得最大利潤？又此時利潤為多少？（12 分）

分析：

本題評量線性規劃概念，考生可利用頂點法或平行線法求解。

（一）正確解題步驟：

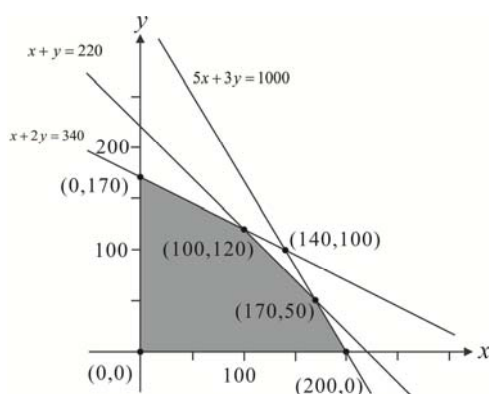
設工廠生產甲合金 x 單位、乙合金 y 單位。

1. 由題意知 x, y 需滿足下列聯立不等式：

$$\begin{cases} x, y \geq 0 \\ 5x + 3y \leq 1000 \\ 3x + 6y \leq 1020 \\ 3x + 3y \leq 660 \end{cases}$$

2. 求出頂點或標示出可行解區域

由聯立不等式可繪出此可行解區域如下圖的灰色區域(含邊界)。其頂點為 $(0, 0)$ 、 $(200, 0)$ 、 $(170, 50)$ 、 $(100, 120)$ 、 $(0, 170)$ 。



3. 求出目標函數

由「甲、乙合金每單位的獲利分別為 600、700 元」得目標函數為 $f(x, y) = 600x + 700y$ 。

4. 說明工廠應生產甲合金 100 單位、乙合金 120 單位，才能獲得最大利潤 144000 元。

【解法一：頂點法】

將可行解區域上的各頂點¹代入目標函數，可得：

(x, y)	(0,0)	(200,0)	(170,50)	(100,120)	(0,170)
$600x+700y$	0	120000	137000	144000	119000

比較大小可知：工廠應生產甲合金 100 單位與乙合金 120 單位，才有最大利潤 144000 元。

【解法二：平行線法】

畫出正確的可行解區域²（標示邊界、頂點 (0,0)、(200,0)、(170,50)、(100,120)、(0,170) 所圍區域）。由於 $f(x, y) = 600x + 700y$ 所定直線之斜率為 $-\frac{6}{7}$ ，當直線 $600x + 700y = k$ 在可行解區域掃動時，因目標函數所定直線之斜率 $-\frac{6}{7}$ 介於 -1 與 $-\frac{1}{2}$ 之間，故得知在 $x = 100, y = 120$ 時，可得最大利潤 144000 元。

(二) 錯誤概念或解法：

(E1) 寫錯不等式，如：
$$\begin{cases} 5x + 3y = 1000 \\ 3x + 6y = 1020 \\ 3x + 3y = 660 \end{cases}$$

(E2) 寫錯可行解區域上的頂點、可行解區域標示錯誤，如：標示成頂點 (100,120)、(170,50)、(140,100) 所圍的三角形區域。

(E3) 未寫出目標函數 $f(x, y) = 600x + 700y$ ，或寫錯目標函數。

(E4) 利用頂點法求解，但直接認定所求為頂點 (100,120)，未將可行解區域上另

¹若以頂點法解題（解法一），必須將五個正確的頂點代入目標函數中比較大小才能得到結論，否則將被扣分。但 (0,0) 未代入目標函數中比較大小，不扣分。

²若以平行線法解題（解法二），必須標示出正確的可行解區域，並說明目標函數所定直線之斜率 $-\frac{6}{7}$ 介於 -1 與 $-\frac{1}{2}$ 之間，才能得知最大值發生在頂點 (100,120)。

外四個頂點 $(0, 0)$ 、 $(200, 0)$ 、 $(170, 50)$ 、 $(0, 170)$ 代入目標函數內比較。

(E5) 利用頂點法求解，將頂點代入目標函數計算函數值作比較時，因計算錯誤，而無法求得正確答案。

(E6) 利用平行線法求解，但未說明目標函數所定直線之斜率 $-\frac{6}{7}$ 介於 -1 與 $-\frac{1}{2}$ 之間。

(E7) 利用平行線法求解，在利用直線 $600x + 700y = k$ 掃動時，因直線畫錯(即斜率錯誤)而找到錯誤頂點。

線性規劃試題的解題步驟較多，需有完整的解題過程方能得滿分，如：考生若以頂點法求解，須將五個正確的頂點代入目標函數比較大小，才能得到結論，否則將被扣分；若以平行線法求解，則必須標示出正確的可行解區域，並說明目標函數的直線斜率介於 -1 與 $-\frac{1}{2}$ 之間，才能得知最大值發生的頂點 $(100, 120)$ 上。數學甲與數學乙的題型有選擇、選填與非選擇題。選擇題與選填題，只要答案正確，即可得到全部分數。但非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數³。本文說明正確的解題概念與步驟，以及得部分分數與無法得分的可能情形，主要用意在於提供老師教學或學生平常練習時的參考。

³ 吳家怡(民 93)，我的數學甲非選擇題得分了嗎。選才通訊，第 120 期。