101 學年度指定科目考試數學乙非選擇題考生作答情形分析

第一處 陳慧美

每年指考成績單寄發後，有些考生認為自己的數學乙考科非選擇題，最後答案明明正確，為什麼無法得到該題的滿分，甚至 1 分未得？本文就此一疑問，說明本年度數學乙非選擇題僅得到部分題分或是 1 分未得的可能情形，以及數學科非選擇題給分的大原則，希望能藉此釐清部分考生的疑惑。以下各題會從兩方面進行分析，一是正確的解題步驟，二是考生解題的一些錯誤概念或解法，至於各題的參考解答可詳見附件。

第一題：

題目： 設二次實係數多項式函數 $f(x)=ax^2+2ax+b$ 在區間 $-1\le x\le 1$ 上的最大值為 7、最小值為 3。試求數對 (a,b) 的所有可能值。（13 分）

分析：

(一) 正確解題步驟：

本題評量二次實係數多項式函數的圖形，其解題步驟為：

1.說明 $f(x)$ 在區間 $-1\le x\le 1$ 中的最大、最小值發生在端點。可利用配方或微分等方法知，此函數圖形的頂點在 $x=-1$，故 $f(x)$ 在區間 $-1\le x\le 1$ 中的最大、最小值發生在 $x=-1$ 或 1 時。

2.接著依 a 的正負分別討論：

(1) 當 $a>0$ 時：$f(x)$ 的函數值在區間 $-1\le x\le 1$ 隨 x 值增加而增大，可知最小值發生在 $x=-1$ 處，而最大值發生在 $x=1$ 處，列式得 $\begin{cases} b-a=3 \\ a+2a+b=7 \end{cases}$，解得 $(a,b)=(1,4)$；

(2) 當 $a<0$ 時：$f(x)$ 的函數值在區間 $-1\le x\le 1$ 隨 x 值增加而減少，可知最大值發生在 $x=-1$ 處，而最小值發生在 $x=1$ 處，列式得 $\begin{cases} b-a=7 \\ a+2a+b=3 \end{cases}$，解得 $(a,b)=(-1,6)$。

(二) 錯誤概念或解法：

以下依據上述的解題方法，分析此題僅得部分分數或未得分的幾種情

形。

(A1)未正確說明此函數圖形的頂點在 $x=-1$處。

(A2)將二次實係數多項式進行配方（或微分）求頂點時，計算錯誤。

(A3)未指出 $a>0$時，$x=-1$有最小值；$a<0$時，$x=-1$有最大值。

(A4)僅列出兩組方程組求解，未說明此函數圖形的頂點，並指出 $a>0$時，$x=-1$處 $f(x)$有最小值；$a<0$時，$x=-1$處 $f(x)$有最大值。

(A5)列錯方程組，或多列出其他不該有的方程組，如：直接認定 $f(x)$的最大、最小值在 $x=1,0,-1$中的兩點，以致於得到三組(甚或更多)方程組。

(A6)列出正確方程組，但求解時計算錯誤。

本題屬高一數學多項式單元之試題，考生若能由二次實係數多項式的圖形、頂點，來說明最大、最小值發生在端點，進而列出兩組正確方程組並求解，即可得到滿分。若僅列出二組正確方程組與求解，而未說明 $f(x)$在區間 $-1\le x\le 1$中的最大、最小值發生在端點等概念者，將無法得到滿分。因由答案卷僅看出考生會解方程組，未能看出考生了解 $f(x)$在區間 $-1\le x\le 1$中的最大、最小值發生在端點等概念。此題的重要觀念為了解 $f(x)$在區間 $-1\le x\le 1$中的最大、最小值會發生在端點，因此若未說明該概念者將無法得滿分。數學科非選擇題主要評量用數學式清楚表達解題過程的能力，因此推理過程與說明是否正確、邏輯判斷是否合理，均為評定分數的重要依據。

第二題：

題目： 某公司生產兩種商品，均以同型的箱子裝運，其中甲商品每箱重 20 公斤，乙商品每箱重 10 公斤。公司出貨時，每趟貨車最多能運送 100 箱，最大載重為 1600 公斤。設甲商品每箱的利潤為 1200 元，乙商品每箱的利潤為 1000 元。

(1) 設公司調配運送時，每趟貨車裏的甲商品為 x 箱，乙商品為 y 箱。試列出 x, y 必須滿足的聯立不等式。（2 分）

(2) 當 x, y 的值各為多少時，可使每趟貨車出貨所能獲得的利潤為最大？此時利潤為多少元？（11 分）

分析：

本題評量線性規劃概念，試題分為二小題，第(1)小題要求寫出滿足題意的聯立不等式；第(2)小題要求說明當 x, y 的值各為多少時，可使每趟貨車出貨所能獲得的利潤為最大？此時利潤為多少元？

第(1)小題

(一) 正確解題步驟：

第(1)小題中，滿足題意的聯立不等式為：$\begin{cases} x, y \geq 0 \\ x + y \leq 100 \\ 20x + 10y \leq 1600 \end{cases}$，其中 x, y 為非負整數。

(二) 錯誤概念或解法：

以下依據上述的解題方法，分析此小題得部分分數或未得分的幾種情形。

(B1)未寫出聯立不等式。

(B2)寫錯聯立不等式，或寫錯不等式中的符號，例如誤為：

$\begin{cases} x + y < 100 \\ 20x + 10y < 1600 \end{cases}$(或寫等式)

(B3)多列不該有的不等式。

第(2)小題

(一) 正確解題步驟：

此小題的解題步驟為：

1.繪出可行解區域並求出該區域的頂點。

2.寫出目標函數。

3.說明在 $x=60, y=40$ 時可得最大利潤。

【法一：頂點法】

正確求出可行解區域的四個頂點，再求出目標函數在四個頂點的正確函數值，比較大小，得到正確答案。

【法二：平行線法】

畫出正確的可行解區域，再描述目標函數所定直線之斜率 $(-\frac{6}{5})$ 介於 -1 與 -2 之間，或在坐標平面上畫出 $1200x+1000y=k$ 之直線，平移後得到正確答案。

(二) 錯誤概念或解法：

以下依據上述的解題方法，分析此小題得部分分數或未得分的幾種情形。

(C1)未寫出目標函數 $f(x,y)=1200x+1000y$，或寫錯目標函數。

(C2)利用頂點法求解，但直接認定所求為頂點 $(60,40)$，未考慮可行解區域上另外三個頂點：$(0,0)$、$(80,0)$、$(0,100)$。

(C3)利用頂點法求解，但寫錯可行解區域上的頂點坐標。

(C4)利用頂點法求解，將頂點代入目標函數計算函數值作比較時，計算錯誤。

(C5)利用平行線法求解，但因可行解區域畫錯，以致於無法得到正確答案。

(C6)利用平行線法求解，但未說明目標函數所定直線之斜率 $\frac{-6}{5}$ 介於 -1 與 -2 之間。

(C7)利用平行線法求解，在利用直線 $1200x+1000y=k$ 掃動時，因直線畫錯(即斜率錯誤)而找到錯誤頂點。

此題為線性規劃試題，在第(1)小題求出聯立不等式中，部分考生未列出不等式組、或寫錯不等式組、或將不等式組的符號寫錯，如：寫成 $\begin{cases} x+y<100 \\ 20x+10y<1600 \end{cases}$，但在計算過程中，又直接利用 $\begin{cases} x+y=100 \\ 20x+10y=1600 \end{cases}$ 求得 $(60,40)$ 這答案，因此在受理考生複查時，最常接觸到的案件為：我的答案明明就寫了

$(60,40)$與 112000，但我的非選擇題為何沒得滿分，甚至連一半的分數都沒有呢？原因是這類的考生一開始將情境問題轉換成數學式時，出現了錯誤的不等式組，且在過程中無合理推論或計算過程，因此無法得滿分。

在寫出目標函數時，有部分考生未寫出或寫錯了目標函數，因此無法說明當 x,y 的值各為多少時，可使每趟貨車出貨所能獲得的利潤為最大。

當考生能正確寫出不等式組、或將可行解區域正確畫出後，在步驟 3 中可利用「平行線法」求解。利用目標函數 $f(x,y)=1200x+1000y$ 所定直線之斜率為 $-\frac{6}{5}$，當直線 $1200x+1000y=k$ 在坐標平面上平移時，可知當每趟貨車裏的甲商品為 60 箱，乙商品為 40 箱時，可使每趟貨車出貨所能獲得的利潤為最大，此時利潤為 112000 元。亦可利用頂點法求值，即求出可行解區域的頂點後，再分別代入目標函數中比大小，可得出當每趟貨車裏的甲商品為 60 箱，乙商品為 40 箱時，可使每趟貨車出貨所能獲得的利潤為最大，此時利潤為 112000 元。考生若利用平行線法求解，較常發生的錯誤為直線 $1200x+1000y=k$ 畫錯而得到錯誤的頂點、或未說明目標函數所定直線之斜率 $\frac{-6}{5}$ 介於 -1 與 -2 之間，因而失去部分分數。

多數考生是利用頂點法求解，其中常見的錯誤類型為：使用頂點法求解時，僅寫出頂點 $(60,40)$，未寫出可行解區域上另外三個頂點 $(0,0)$、$(80,0)$、$(0,100)$，即直接將 $(60,40)$ 代入目標函數中，認定此時可得最大利潤為 112000。由考生的作答過程，僅看出考生會求解聯立方程式 $\begin{cases} x+y=100 \\ 20x+10y=1600 \end{cases}$，但無法得知考生是否知道該聯立不等式 $\begin{cases} x,y\geq 0 \\ x+y\leq 100 \\ 20x+10y\leq 1600 \end{cases}$ 所圍的可行解區域為何？極值可能會發生在哪些頂點上，為何最大利潤會發生在頂點 $(60,40)$ 上？另有少數考生在寫出可行解區域頂點時，因粗心算錯頂點坐標，而無法得到正確答案，或將正確頂點代入目標函數中作比較時，部分計算錯誤而失去部分分數，實在可惜。此外，有部分的考生已解出可行解區域的四個頂點，卻沒有將四個頂點代入比較，以致無法由答案卷上得知最大利潤所發生的點是如何求得的，因而無法得到滿分。

數學甲與數學乙的題型有選擇、選填與非選擇題。選擇題與選填題，只要答案正確，即可得到全部分數。但非選擇題主要評量考生是否能夠清

楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數[1]。本文說明正確的解題概念與步驟，以及得部分分數與無法得分的可能情形，主要用意在於提供老師教學或學生平常練習時的參考。

[1] 吳家怡(民 93)，我的數學甲非選擇題得分了嗎。選才通訊，第 120 期。

附件

數學科試題的解法不只一種，以下提供多數考生可能採用的解法，未列的解法，只要推論或解題過程正確，仍可得分。

第一題

1. 說明 $f(x)$ 在區間 $-1 \le x \le 1$ 中的最大、最小值發生在端點。

【解法一】

將 $f(x)$ 配方得 $f(x) = ax^2 + 2ax + b = a(x+1)^2 + (b-a)$ ，故知 $(-1, b-a)$ 為函數圖形 $y = f(x)$ 的頂點；因此 $f(x)$ 在區間 $-1 \le x \le 1$ 中的最大、最小值發生在 $x = -1$ 或 1 時。

【解法二】

將 $f(x)$ 微分得 $f'(x) = 2ax + 2a = 2a(x+1)$ ， 故 $f'(1)$=0 ，得知 $f(x)$ 在 $x = -1$ 時有極值，因此二次函數 $f(x)$ 在 $x = -1$ 時有最大（或最小）值；從而知 $f(x)$ 在區間 $-1 \le x \le 1$ 的另一端點 $x = 1$ 時有最小（或最大)值。

2. 接著依 a 的正負分別討論：

(1)當 $a > 0$ 時： $f(x)$ 的函數值在區間 $-1 \le x \le 1$ 隨 x 值增加而增大，可知最小值發生在 $x = -1$ 處，而最大值發生在 $x = 1$ 處。

由題意可列式得 $\begin{cases} b - a = 3 \\ a + 2a + b = 7 \end{cases}$ ，解得 $(a,b) = (1,4)$ 。

(2)當 $a < 0$ 時： $f(x)$ 的函數值在區間 $-1 \le x \le 1$ 隨 x 值增加而減少，可知最大值發生在 $x = -1$ 處，而最小值發生在 $x = 1$ 處。

由題意可列式得 $\begin{cases} b - a = 7 \\ a + 2a + b = 3 \end{cases}$ ，解得 $(a,b) = (-1,6)$ 。

註：必須先說明 $f(x)$ 在區間 $-1 \le x \le 1$ 中的最大、最小值發生在端點，否則將被扣分。

第二題

第(1)題

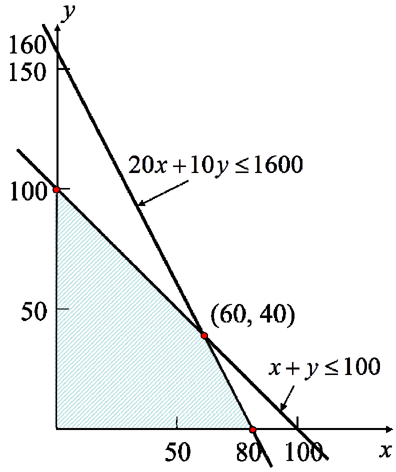
設每趟貨車運送甲商品 x 箱、乙商品 y 箱。由題意可列不等式組為

$$\begin{cases} x, y \ge 0 \\ x+y \le 100 \\ 20x+10y \le 1600 \end{cases}$$ ，其中 x, y 為非負整數。

第(2)題

1. 求出頂點或畫出可行解區域

由(1)之聯立不等式可繪出可行解區域如下圖的灰色區域（含邊界）：



此可行解區域為凸四邊形，其頂點為 $(0, 0)$ 、 $(80, 0)$ 、 $(60, 40)$ 、 $(0,100)$ 。

2. 求出目標函數

由「甲商品每箱的利潤為 1200 元，乙商品每箱的利潤為 1000 元」得目標函數為 $f(x, y)=1200x+1000y$ 。

3. 說明在 $x=60, y=40$ 可得最大利潤

【解法一】

將四點分別代入目標函數 $f(x, y)=1200x+1000y$ ，可得：

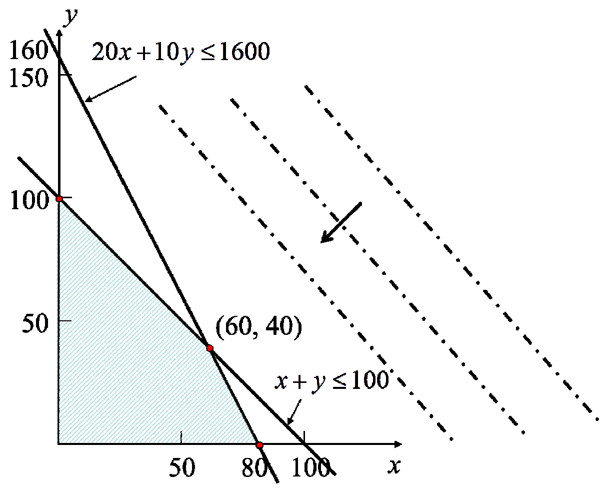
(x, y)	$(0,0)$	$(80,0)$	$(60,40)$	$(0,100)$
$f(x, y)$	0	96000	112000	100000

由表中完全正確的四個函數值，比較其大小可知利潤最大值發生於 $(60,40)$ 處。因此應讓每趟貨車運送甲商品 60 箱、乙商品 40 箱，此時可得最大利潤為 112000 元。

【解法二】

畫出正確的可行解區域（標示邊界、頂點 $(0, 0)$ 、 $(80, 0)$ 、 $(60, 40)$ 、 $(0,100)$

所圍區域）。由於 $f(x, y) = 1200x + 1000y$ 所定直線之斜率為 $-\frac{6}{5}$ ，當直線 $1200x + 1000y = k$ 在可行解區域掃動時，因目標函數所定直線之斜率 $-\frac{6}{5}$ 介於 -1 與 -2 之間，故得知在 $x = 60, y = 40$ 時，可得最大利潤 112000 元。



註：1. 若以頂點法解題（解法一），必須列出目標函數在四個頂點的完全正確函數值，進而比較其大小才能得到結論，任何計算錯誤（即使不影響答案）均將被扣分。

2. 若以平行線法解題（解法二），必須標示出正確的可行解區域，並說明目標函數所定直線之斜率 $-\frac{6}{5}$ 介於 -1 與 -2 之間，才能得知最大值發生在頂點 $(60, 40)$ 。