大學入學考試中心
108 學年度指定科目考試試題
數學甲

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

作答方式：
- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 3 與第 19 列的 8 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
19	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 − 與第 21 列的 7 畫記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
21	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 某公司尾牙舉辦「紅包大放送」活動。每位員工擲兩枚均勻銅板一次，若出現兩個反面可得獎金 400 元；若出現一正一反可得獎金 800 元；若出現兩個正面可得獎金 800 元並且獲得再擲一次的機會，其獲得獎金規則與前述相同，但不再有繼續投擲銅板的機會（也就是說每位員工最多有兩次擲銅板的機會）。試問每位參加活動的員工可獲得獎金的期望值為何？

   (1) 850 元

   (2) 875 元

   (3) 900 元

   (4) 925 元

   (5) 950 元

2. 設 n 為正整數。第 n 個費馬數（Fermat Number）定義為 $F_n = 2^{(2^n)}+1$，例如 $F_1 = 2^{(2^1)}+1 = 2^2+1 = 5$，$F_2 = 2^{(2^2)}+1 = 2^4+1 = 17$。試問 $\dfrac{F_{13}}{F_{12}}$ 的整數部分以十進位表示時，其位數最接近下列哪一個選項？（ $\log 2 \approx 0.3010$ ）

   (1) 120

   (2) 240

   (3) 600

   (4) 900

   (5) 1200

3. 在一座尖塔的正南方地面某點 A，測得塔頂的仰角為 $14°$；又在此尖塔正東方地面某點 B，測得塔頂的仰角為 $18°30'$，且 A、B 兩點距離為 65 公尺。已知當在線段 $\overline{AB}$ 上移動時，在 C 點測得塔頂的仰角為最大，則 C 點到塔底的距離最接近下列哪一個選項？（ $\cot 14° \approx 4.01$， $\cot 18°30' \approx 2.99$ ）

(1) 27 公尺

(2) 29 公尺

(3) 31 公尺

(4) 33 公尺

(5) 35 公尺

二、多選題（占 40 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

4. 設 Γ 為坐標平面上通過 $(7,0)$ 與 $(0,\frac{7}{2})$ 兩點的圓。試選出正確的選項。

(1) Γ 的半徑大於或等於 5

(2) 當 Γ 的半徑達到最小可能值時，Γ 通過原點

(3) Γ 與直線 $x+2y=6$ 有交點

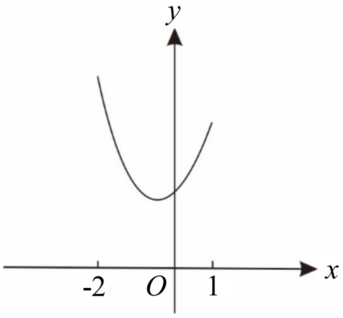
(4) Γ 的圓心不可能在第四象限

(5) 若 Γ 的圓心在第三象限，則 Γ 的半徑大於 8

5. 袋中有 2 顆紅球、3 顆白球與 1 顆藍球，其大小皆相同。今將袋中的球逐次取出，每次隨機取出一顆，取後不放回，直到所有球被取出為止。試選出正確的選項。
   (1) 「取出的第一顆為紅球」的機率等於「取出的第二顆為紅球」的機率
   (2) 「取出的第一顆為紅球」與「取出的第二顆為紅球」兩者為獨立事件
   (3) 「取出的第一顆為紅球」與「取出的第二顆為白球或藍球」兩者為互斥事件
   (4) 「取出的第一、二顆皆為紅球」的機率等於「取出的第一、二顆皆為白球」的機率
   (5) 「取出的前三顆皆為白球」的機率小於「取出的前三顆球顏色皆相異」的機率

6. 設 $\langle a_n \rangle$、$\langle b_n \rangle$ 為兩實數數列，且對所有的正整數 n， $a_n < b_n^{\,2} < a_{n+1}$ 均成立。若已知 $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 4$，試選出正確的選項。
   (1) 對所有的正整數 n， $a_n > 3$ 均成立
   (2) 存在正整數 n，使得 $a_{n+1} > 4$
   (3) 對所有的正整數 n， $b_n^{\,2} < b_{n+1}^{\,2}$ 均成立
   (4) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n^{\,2} = 4$
   (5) $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = 2$ 或 $\lim\limits_{n\to\infty} b_n = -2$

7. 已知三次實係數多項式函數 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+2$，在 $-2\le x\le 1$ 範圍內的圖形如示意圖：



試選出正確的選項。

(1) $a>0$

(2) $b>0$

(3) $c>0$

(4) 方程式 $f(x)=0$ 恰有三實根

(5) $y=f(x)$ 圖形的反曲點的 y 坐標為正

8. 坐標平面上以原點 O 為圓心的單位圓上三相異點 A、B、C 滿足 $2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}+4\overrightarrow{OC}=\overrightarrow{0}$，其中 A 點的坐標為 $(1,0)$。試選出正確的選項。

(1) 向量 $2\overrightarrow{OA}+3\overrightarrow{OB}$ 的長度為 4

(2) 內積 $\overrightarrow{OA}\cdot\overrightarrow{OB}<0$

(3) $\angle BOC$、$\angle AOC$、$\angle AOB$ 中，以 $\angle BOC$ 的度數為最小

(4) $\overline{AB}>\dfrac{3}{2}$

(5) $3\sin\angle AOB=4\sin\angle AOC$

三、選填題（占 18 分）

說明：1.第 A 至 C 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號 (9–18)。
2.每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 在坐標平面上，定義一個坐標變換 $\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$，其中 $\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}$ 代表舊坐標，$\begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix}$ 代表新坐標。若舊坐標為 $\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$ 的點 P 經此坐標變換得到的新坐標為 $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$，則 $(r,s) = ($ 9 , 10 11 $)$。

B. 在坐標平面上，$A(a,r)$、$B(b,s)$ 為函數圖形 $y = \log_2 x$ 上之兩點，其中 $a < b$。已知 A、B 連線的斜率等於 2，且線段 $\overline{AB}$ 的長度為 $\sqrt{5}$，則 $(a,b) = \left(\dfrac{⑫}{⑬}, \dfrac{⑭}{⑮} \right)$。（化成最簡分數）

C. 設 z 為複數。在複數平面上，一個正六邊形依順時針方向的連續三個頂點為 z、0、$z + 5 - 2\sqrt{3}i$（其中 $i = \sqrt{-1}$），則 z 的實部為 $\dfrac{⑯⑰}{⑱}$。（化成最簡分數）

－－－以下是第貳部分的非選擇題，必須在答案卷面作答－－－

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。若因字跡潦草、未標示題號、標錯題號等原因，致評閱人員無法清楚辨識，其後果由考生自行承擔。每一子題配分標於題末。

一. 坐標空間中以 O 表示原點，給定兩向量 $\overrightarrow{OA}=(1,\sqrt{2},1)$、$\overrightarrow{OB}=(2,0,0)$。試回答下列問題。

(1) 若 $\overrightarrow{OP}$ 是長度為 2 的向量，且與 $\overrightarrow{OA}$ 之夾角為 $60°$，試求向量 $\overrightarrow{OA}$ 與 $\overrightarrow{OP}$ 的內積。（2 分）

(2) 承(1)，已知滿足此條件的所有點 P 均落在一平面 E 上，試求平面 E 的方程式。（2 分）

(3) 若 $\overrightarrow{OQ}$ 是長度為 2 的向量，分別與 $\overrightarrow{OA}$、$\overrightarrow{OB}$ 之夾角皆為 $60°$，已知滿足此條件的所有點 Q 均落在一直線 L 上，試求直線 L 的方向向量。（4 分）

(4) 承(3)，試求出滿足條件的所有 Q 點之坐標。（4 分）

二. 設 $f(x)$ 為實係數多項式函數，且 $xf(x)=3x^4-2x^3+x^2+\int_1^x f(t)\,dt$ 對 $x\geq 1$ 恆成立。試回答下列問題。

(1) 試求 $f(1)$。（2 分）

(2) 試求 $f'(x)$。（4 分）

(3) 試求 $f(x)$。（2 分）

(4) 試證明恰有一個大於 1 的正實數 a 滿足 $\int_0^a f(x)\,dx=1$。（4 分）