大學入學考試中心
九十七學年度學科能力測驗試題
數學考科

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 5 題，多選題 7 題，選填題第 A 至 H 題共 8 題

作答方式：• 用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答，修正時應以橡皮擦拭，切勿使用修正液

• 答錯不倒扣

作答說明：在答案卡適當位置選出數值或符號。請仔細閱讀下面的例子。

（一）填答選擇題時，只用 1，2，3，4，5 等五個格子，而不需要用到–，±，以及 6，7，8，9，0 等格子。

例：若第 1 題的選項為(1)3 (2)5 (3)7 (4)9 (5)11，而正確的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列的 $\underset{\square}{3}$ 劃記（注意不是 7），如：

解答欄												
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	–	±
1	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□

例：若多選題第 10 題的正確選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡的第 10 列的 $\underset{\square}{1}$ 與 $\underset{\square}{3}$ 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	–	±
10	■	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□

（二）選填題的題號是 A，B，C，…，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\underset{\square}{3}$ 與第 19 列的 $\underset{\square}{8}$ 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	–	±
18	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
19	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$ ，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\underset{\square}{-}$ 與第 21 列的 $\underset{\square}{7}$ 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	–	±
20	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
21	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

※試題後附有參考公式及可能用到的對數值與參考數值

第一部分：選擇題（佔 60 分）

壹、單選題（佔 25 分）

說明：第 1 至 5 題，每題選出最適當的一個選項，劃記在答案卡之「解答欄」，每題答對得 5 分，答錯不倒扣。

1. 對任意實數 x 而言，$27^{(x^2+\frac{2}{3})}$ 的最小值爲

   (1) 3　(2) $3\sqrt{3}$　(3) 9　(4) 27　(5) $81\sqrt{3}$

2. 在職棒比賽中 ERA 值是了解一個投手表現的重要統計數值。其計算方式如下：若此投手共主投 n 局，其總責任失分爲 E，則其 ERA 值爲 $\frac{E}{n}\times 9$。有一位投手在之前的比賽中共主投了 90 局，且這 90 局中他的 ERA 值爲 3.2。在最新的一場比賽中此投手主投 6 局無責任失分，則打完這一場比賽後，此投手的 ERA 值成爲

   (1) 2.9　(2) 3.0　(3) 3.1　(4) 3.2　(5) 3.3

3. 有一個圓形跑道分內、外兩圈，半徑分別爲 30、50 公尺。今甲在內圈以等速行走、乙在外圈以等速跑步，且知甲每走一圈，乙恰跑了兩圈。若甲走了 45 公尺，則同時段乙跑了

   (1) 90 公尺　(2) 120 公尺　(3)135 公尺　(4)150 公尺　(5) 180 公尺

4. 某地區的車牌號碼共六碼，其中前兩碼爲 O 以外的英文大寫字母，後四碼爲 0 到 9 的阿拉伯數字，但規定不能連續出現三個 4。例如： AA1234 , AB4434 爲可出現的車牌號碼；而 AO1234 , AB3444 爲不可出現的車牌號碼。則所有第一碼爲 A 且最後一碼爲 4 的車牌號碼個數爲

   (1) 25×9^3　(2) $25\times 9^2\times 10$　(3) 25×900　(4) 25×990　(5) 25×999

5. 廣場上插了一支紅旗與一支白旗，小明站在兩支旗子之間。利用手邊的儀器，小明測出他與正東方紅旗間的距離為他與正西方白旗間距離的 6 倍；小明往正北方走了 10 公尺之後再測量一次，發現他與紅旗的距離變成他與白旗距離的 4 倍。試問紅白兩旗之間的距離最接近下列哪個選項？

(1) 60 公尺　(2) 65 公尺　(3) 70 公尺　(4) 75 公尺　(5) 80 公尺

貳、多選題（佔 35 分）

說明：第 6 至 12 題，每題的五個選項各自獨立，其中至少有一個選項是正確的，選出正確選項劃記在答案卡之「解答欄」。每題皆不倒扣，五個選項全部答對者得 5 分，只錯一個選項可得 2.5 分，錯兩個或兩個以上選項不給分。

6. 試問：在坐標平面上，下列哪些選項中的函數圖形完全落在 x 軸的上方？

(1) $y = x + 100$

(2) $y = x^2 + 1$

(3) $y = 2 + \sin x$

(4) $y = 2^x$

(5) $y = \log x$

7. 某高中共有 20 個班級，每班各有 40 位學生，其中男生 25 人，女生 15 人。若從全校 800 人中以簡單隨機抽樣抽出 80 人，試問下列哪些選項是正確的？

(1) 每班至少會有一人被抽中

(2) 抽出來的男生人數一定比女生人數多

(3) 已知小文是男生，小美是女生，則小文被抽中的機率大於小美被抽中的機率

(4) 若學生甲和學生乙在同一班，學生丙在另外一班，則甲、乙兩人同時被抽中的機率跟甲、丙兩人同時被抽中的機率一樣

(5) 學生 A 和學生 B 是兄弟，他們同時被抽中的機率小於 $\frac{1}{100}$

8. 已知a_1,a_2,a_3爲一等差數列，而b_1,b_2,b_3爲一等比數列，且此六數皆爲實數。試問下列哪些選項是正確的？

(1) $a_1 < a_2$與$a_2 > a_3$可能同時成立

(2) $b_1 < b_2$與$b_2 > b_3$可能同時成立

(3) 若$a_1 + a_2 < 0$，則$a_2 + a_3 < 0$

(4) 若$b_1 b_2 < 0$，則$b_2 b_3 < 0$

(5) 若b_1,b_2,b_3皆爲正整數且$b_1 < b_2$，則b_1整除b_2

9. 已知在一容器中有 A,B 兩種菌，且在任何時刻 A,B 兩種菌的個數乘積爲定值10^{10}。爲了簡單起見，科學家用$P_A = \log(n_A)$來記錄 A 菌個數的資料，其中n_A爲 A 菌的個數。試問下列哪些選項是正確的？

(1) $1 \le P_A \le 10$

(2) 當$P_A = 5$時，B 菌的個數與 A 菌的個數相同

(3) 如果上週一測得P_A值爲 4 而上週五測得P_A值爲 8，表示上週五 A 菌的個數是上週一 A 菌個數的 2 倍

(4) 若今天的P_A值比昨天增加 1，則今天的 A 菌比昨天多了 10 個

(5) 假設科學家將 B 菌的個數控制爲 5 萬個，則此時$5 < P_A < 5.5$

10. 已知實係數多項式$f(x)$與$g(x) = x^3 + x^2 - 2$有次數大於 0 的公因式。試問下列哪些選項是正確的？

(1) $g(x) = 0$恰有一實根

(2) $f(x) = 0$必有實根

(3) 若$f(x) = 0$與$g(x) = 0$有共同實根，則此實根必爲 1

(4) 若$f(x) = 0$與$g(x) = 0$有共同實根，則$f(x)$與$g(x)$的最高公因式爲一次式

(5) 若$f(x) = 0$與$g(x) = 0$沒有共同實根，則$f(x)$與$g(x)$的最高公因式爲二次式

11. 設坐標空間中三條直線 L_1, L_2, L_3 的方程式分別為

$$L_1:\frac{x}{1}=\frac{y+3}{6}=\frac{z+4}{8};\qquad L_2:\frac{x}{1}=\frac{y+3}{3}=\frac{z+4}{4};\qquad L_3:\frac{x}{1}=\frac{y}{3}=\frac{z}{4}\text{。}$$

試問下列哪些選項是正確的？

(1) L_1 與 L_2 相交

(2) L_2 與 L_3 平行

(3) 點 $P(0,-3,-4)$ 與 $Q(0,0,0)$ 的距離即為點 P 到 L_3 的最短距離

(4) 直線 $L:\begin{cases} x=0 \\ \dfrac{y+3}{4}=\dfrac{z+4}{-3} \end{cases}$ 與直線 L_1, L_2 皆垂直

(5) 三直線 L_1, L_2, L_3 共平面

12. 設 $\Gamma: x^2+y^2-10x+9=0$ 為坐標平面上的圓。試問下列哪些選項是正確的？

(1) Γ 的圓心坐標為 $(5,0)$

(2) Γ 上的點與直線 $L:3x+4y-15=0$ 的最遠距離等於 4

(3) 直線 $L_1:3x+4y+15=0$ 與 Γ 相切

(4) Γ 上恰有兩個點與直線 $L_2:3x+4y=0$ 的距離等於 2

(5) Γ 上恰有四個點與直線 $L_3:3x+4y-5=0$ 的距離等於 2

第二部分：選填題（佔 40 分）

說明：1.第 A 至 H 題，將答案劃記在答案卡之「解答欄」所標示的列號 (13–43)。 2.每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 令 $A(-1,6,0)$, $B(3,-1,-2)$, $C(4,4,5)$ 為坐標空間中三點。若 D 為空間中的一點且滿足 $3\overrightarrow{DA}-4\overrightarrow{DB}+2\overrightarrow{DC}=\vec{0}$，則點 D 的坐標為(⑬⑭ , ⑮⑯ , ⑰⑱)。

B. 在坐標平面上，設 A 爲直線 $3x-y=0$ 上一點， B 爲 x 軸上一點。若線段 $\overline{AB}$ 的中點坐標爲 $\left(\frac{7}{2},6\right)$，則點 A 的坐標爲(⑲ , ⑳㉑)，點 B 的坐標爲(㉒ , 0)。

C. 坐標平面上，以原點 O 爲圓心的圓上有三個相異點 $A(1,0)$, B, C ，且 $\overline{AB}=\overline{BC}$ 。已知銳角三角形 OAB 的面積爲 $\frac{3}{10}$ ，則 ΔOAC 的面積爲 $\frac{㉓㉔}{㉕㉖}$。(化爲最簡分數)

D. 設 F_1 與 F_2 爲坐標平面上雙曲線 $\Gamma:\frac{x^2}{8}-y^2=1$ 的兩個焦點，且 $P(-4,\ 1)$ 爲 Γ 上一點。若 $\angle F_1PF_2$ 的角平分線與 x 軸交於點 D， 則 D 的 x 坐標爲 ㉗㉘ 。

E. 設 $O(0,0,0)$ 爲坐標空間中某長方體的一個頂點，且知 $(2,2,1),(2,-1,-2),(3,-6,6)$ 爲此長方體中與 O 相鄰的三頂點。若平面 $E: x+by+cz=d$ 將此長方體截成兩部分，其中包含頂點 O 的那一部分是個正立方體，則 $(b,c,d)=($ ㉙㉚ , ㉛ , ㉜ $)$。

F. 設 a,b 爲正整數。若 $b^2=9a$ ，且 $a+2b>280$ ， 則 a 的最小可能值爲 ㉝㉞㉟ 。

G. 坐標平面上有一質點沿方向 $\overrightarrow{u}=(1,\ 2)$ 前進。現欲在此平面上置一直線 L，使得此質點碰到 L 時依光學原理(入射角等於反射角)反射，之後沿方向 $\overrightarrow{v}=(-2,\ 1)$ 前進，則直線 L 的方向向量應爲 $\overrightarrow{w}=(1,\ \underline{㊱㊲}\ )$。

H. 已知坐標平面上圓 $O_1:(x-7)^2+(y-1)^2=144$ 與 $O_2:(x+2)^2+(y-13)^2=9$ 相切，且此兩圓均與直線 L: $x=-5$ 相切。若 Γ 爲以 L 爲準線的抛物線，且同時通過 O_1 與 O_2 的圓心，則 Γ 的焦點坐標爲($\dfrac{㊳㊴}{㊵}$, $\dfrac{㊶㊷}{㊸}$)。（化爲最簡分數）

參 考 公 式 及 可 能 用 到 的 數 值

1. 一元二次方程式 $ax^2+bx+c=0$ 的公式解： $x=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$

2. 平面上兩點 $P_1\left(x_1,y_1\right)$ ， $P_2\left(x_2,y_2\right)$ 間的距離爲 $\overline{P_1P_2}=\sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$

3. 通過 $\left(x_1,y_1\right)$ 與 $\left(x_2,y_2\right)$ 的直線斜率 $m=\dfrac{y_2-y_1}{x_2-x_1}$, $x_2\neq x_1$.

4. 首項爲 a_1, 公差爲 d 的等差數列前 n 項之和爲 $S=\dfrac{n(a_1+a_n)}{2}=\dfrac{n(2a_1+(n-1)d)}{2}$

   等比數列 $\left\langle ar^{k-1}\right\rangle$ 的前 n 項之和 $S_n=\dfrac{a\cdot(1-r^n)}{1-r}$, $r\neq 1$.

5. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B)=\sin A\cos B+\sin B\cos A$

   $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

   $\tan(\theta_1+\theta_2)=\dfrac{\tan\theta_1+\tan\theta_2}{1-\tan\theta_1\tan\theta_2}$

6. ΔABC 的正弦定理： $\dfrac{\sin A}{a}=\dfrac{\sin B}{b}=\dfrac{\sin C}{c}$

   ΔABC 的餘弦定理： $c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

7. 棣美弗定理: 設 $z=r\left(\cos\theta+i\sin\theta\right)$ ，則 $z^n=r^n\left(\cos n\theta+i\sin n\theta\right)$ ， n 爲一正整數

8. 算術平均數： $M(=\overline{X})=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$

   (樣本)標準差： $S=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\overline{X})^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n-1}((\sum_{i=1}^{n}x_i^2)-n\overline{X}^2)}$

9. 參考數值： $\sqrt{2}\approx 1.414$; $\sqrt{3}\approx 1.732$; $\sqrt{5}\approx 2.236$; $\sqrt{6}\approx 2.449$; $\pi\approx 3.142$

10. 對數值： $\log_{10}1.1\approx 0.0414$, $\log_{10}2\approx 0.3010$, $\log_{10}3\approx 0.4771$, $\log_{10}5\approx 0.6990$, $\log_{10}7\approx 0.8451$