

第一部分：選擇題

壹、單一選擇題

說明：第1至5題，每題選出最適當的一個選項，標示在答案卡之「解答欄」，每題答對得5分，答錯不倒扣。

1. 試問有多少個正整數  $n$  使得  $\frac{1}{n} + \frac{2}{n} + \dots + \frac{10}{n}$  為整數？  
(1) 1個      (2) 2個      (3) 3個      (4) 4個      (5) 5個
2. 若  $f(x) = x^3 - 2x^2 - x + 5$ ，則多項式  $g(x) = f(f(x))$  除以  $(x-2)$  所得的餘式為  
(1) 3      (2) 5      (3) 7      (4) 9      (5) 11
3. 若  $(4+3i)(\cos\theta + i\sin\theta)$  為小於0的實數，則  $\theta$  是第幾象限角？  
(1) 第一象限角      (2) 第二象限角  
(3) 第三象限角      (4) 第四象限角  
(5) 條件不足，無法判斷
4. 設  $ABC$  為坐標平面上三角形， $P$  為平面上一點且  $\overrightarrow{AP} = \frac{1}{5}\overrightarrow{AB} + \frac{2}{5}\overrightarrow{AC}$ ，則  
 $\frac{\Delta ABP \text{面積}}{\Delta ABC \text{面積}}$  等於  
(1)  $\frac{1}{5}$       (2)  $\frac{1}{4}$       (3)  $\frac{2}{5}$       (4)  $\frac{1}{2}$       (5)  $\frac{2}{3}$

5. 根據統計資料，在 A 小鎮當某件訊息發布後， $t$  小時之內聽到該訊息的人口是全鎮人口的  $100(1-2^{-kt})\%$ ，其中  $k$  是某個大於 0 的常數。今有某訊息，假設在發布後 3 小時之內已經有 70% 的人口聽到該訊息。又設最快要  $T$  小時後，有 99% 的人口已聽到該訊息，則  $T$  最接近下列哪一個選項？
- (1) 5 小時    (2)  $7\frac{1}{2}$  小時    (3) 9 小時    (4)  $11\frac{1}{2}$  小時    (5) 13 小時

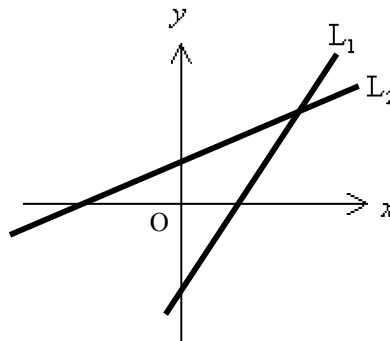
貳、多重選擇題

說明：第 6 至 11 題，每題至少有一個選項是正確的，選出正確選項，標示在答案卡之「解答欄」。每題答對得 5 分，答錯不倒扣，未答者不給分。只錯一個可獲 2.5 分，錯兩個或兩個以上不給分。

6. 如右圖，兩直線  $L_1$ 、 $L_2$  之方程式分別為  $L_1 : x+ay+b=0$ ， $L_2 : x+cy+d=0$ ；

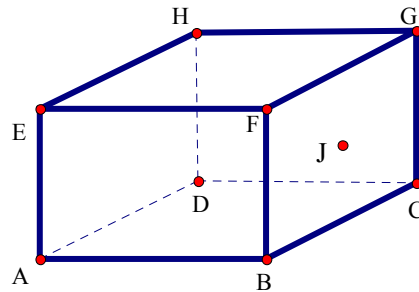
試問下列哪些選項是正確的？

- (1)  $a > 0$   
 (2)  $b > 0$   
 (3)  $c > 0$   
 (4)  $d > 0$   
 (5)  $a > c$



7. 如右圖， $ABCD-EFGH$  為一平行六面體， $J$  為四邊形  $BCGF$  的中心，如果  $\vec{AJ} = a\vec{AB} + b\vec{AD} + c\vec{AE}$ ，試問下列哪些選項是正確的？

- (1)  $\frac{1}{3} < b < \frac{2}{3}$
- (2)  $a + b + c = 2$
- (3)  $a = 1$
- (4)  $a = 2c$
- (5)  $a = b$



8. 以下各數何者為正？

- (1)  $\sqrt{2} - \sqrt[3]{2}$
- (2)  $\log_2 3 - 1$
- (3)  $\log_3 2 - 1$
- (4)  $\log_{\frac{1}{2}} 3$
- (5)  $\log_{\frac{1}{3}} \frac{1}{2}$

9. 下列哪些函數的最小正週期為  $\pi$ ？

- (1)  $\sin x + \cos x$
- (2)  $\sin x - \cos x$
- (3)  $|\sin x + \cos x|$
- (4)  $|\sin x - \cos x|$
- (5)  $|\sin x| + |\cos x|$

10. 假設坐標平面上非空集合  $S$  內的點  $(x, y)$  具有以下性質：「若  $x > 0$ ，則  $y > 0$ 」。
- 試問下列哪些敘述對  $S$  內的點  $(x, y)$  必定成立？
- (1) 若  $x \leq 0$ ，則  $y \leq 0$ ；                      (2) 若  $y \leq 0$ ，則  $x \leq 0$ ；
- (3) 若  $y > 0$ ，則  $x > 0$ ；                      (4) 若  $x > 1$ ，則  $y > 0$ ；
- (5) 若  $y < 0$ ，則  $x \leq 0$ 。
- 
11. 設  $\pi_a : x - 4y + az = 10$  ( $a$  為常數)、 $E_1 : x - 2y + z = 5$  及  $E_2 : 2x - 5y + 4z = -3$  為坐標空間中的三個平面。試問下列哪些敘述是正確的？
- (1) 存在實數  $a$  使得  $\pi_a$  與  $E_1$  平行；
- (2) 存在實數  $a$  使得  $\pi_a$  與  $E_1$  垂直；
- (3) 存在實數  $a$  使得  $\pi_a, E_1, E_2$  交於一點；
- (4) 存在實數  $a$  使得  $\pi_a, E_1, E_2$  交於一直線；
- (5) 存在實數  $a$  使得  $\pi_a, E_1, E_2$  沒有共同交點。

## 第二部分：填充題

說明：1. 第 A 至 I 題，將答案標示在答案卡之「解答欄」所標示的列號 (12-34)。  
2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 設  $a_1, a_2, \dots, a_{50}$  是從  $-1, 0, 1$  這三個整數中取值的數列。若  $a_1 + a_2 + \dots + a_{50} = 9$  且  $(a_1 + 1)^2 + (a_2 + 1)^2 + \dots + (a_{50} + 1)^2 = 107$ ，則  $a_1, a_2, \dots, a_{50}$  當中有幾項是 0？
- 答： 12 13 項。

B. 金先生在提款時忘了帳號密碼，但他還記得密碼的四位數字中，有兩個 3，一個 8，一個 9，於是他就用這四個數字隨意排成一個四位數輸入提款機嘗試。請問他只試一次就成功的機率有多少？答： $\frac{\textcircled{14}}{\textcircled{15}\textcircled{16}}$ 。(化成最簡分數)

C. 設  $A(1,0)$  與  $B(b,0)$  為坐標平面上的兩點，其中  $b > 1$ 。若拋物線  $\Gamma: y^2 = 4x$  上有一點  $P$  使得  $\triangle ABP$  為一正三角形，則  $b = \underline{\textcircled{17}}$ 。

D. 設  $P$  為雙曲線  $\frac{x^2}{9} - \frac{y^2}{16} = 1$  上的一點且位在第一象限。若  $F_1$ 、 $F_2$  為此雙曲線的兩個焦點，且  $\overline{PF_1} : \overline{PF_2} = 1:3$ ，則  $\triangle F_1PF_2$  的周長等於  $\underline{\textcircled{18}\textcircled{19}}$ 。

E. 在坐標空間中，通過  $O(0,0,0)$ ， $N(0,0,1)$ ， $P(\frac{1}{4}, \frac{\sqrt{11}}{4}, -\frac{1}{2})$  三點的平面與球面  $S: x^2 + y^2 + z^2 = 1$  相交於一個圓  $C$ ，則圓  $C$  的劣弧  $\widehat{NP}$  的弧長等於  $\frac{\textcircled{20}}{\textcircled{21}}\pi$ 。(化成最簡分數)

(所謂劣弧  $\widehat{NP}$  是指圓  $C$  上由  $N, P$  兩點所連接的兩弧中較短的那一段弧。)

- F. 設  $k$  爲一整數。若方程式  $kx^2 + 7x + 1 = 0$  有兩個相異實根，且兩根的乘積介於  $\frac{5}{71}$  與  $\frac{6}{71}$  之間，則  $k = \underline{\textcircled{22} \textcircled{23}}$ 。
- G. 在只有皮尺沒有梯子的情形下，想要測出一拋物線形拱門的高度。已知此拋物線以過最高點的鉛垂線爲對稱軸。現甲、乙兩人以皮尺測得拱門底部寬爲 6 公尺，且距底部  $\frac{3}{2}$  公尺高處其寬爲 5 公尺。利用這些數據可推算出拱門的高度爲  $\underline{\frac{\textcircled{24} \textcircled{25}}{\textcircled{26} \textcircled{27}}}$  公尺。  
(化成最簡分數)
- H. 某次數學測驗共有 25 題單一選擇題，每題都有五個選項，每答對一題可得 4 分，答錯倒扣 1 分。某生確定其中 16 題可答對；有 6 題他確定五個選項中有兩個選項不正確，因此這 6 題他就從剩下的選項中分別猜選一個；另外 3 題只好亂猜，則他這次測驗得分之期望值爲  $\underline{\textcircled{28} \textcircled{29}}$  分。(計算到整數爲止，小數點以後四捨五入。)
- I. 根據統計資料，1 月份台北地區的平均氣溫是攝氏 16 度，標準差是攝氏 3.5 度。一般外國朋友比較習慣用華氏溫度來表示冷熱，已知當攝氏溫度爲  $x$  時，華氏溫度爲  $y = \frac{9}{5}x + 32$ ；若用華氏溫度表示，則 1 月份台北地區的平均氣溫是華氏  $\underline{\textcircled{30} \textcircled{31} \textcircled{32}}$  度，標準差是華氏  $\underline{\textcircled{33} \textcircled{34}}$  度。(計算到小數點後第一位，以下四捨五入。)

### 參考公式及可能用到的數值

1. 一元二次方程式  $ax^2+bx+c=0$  的公式解：
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2. 通過  $(x_1, y_1)$  與  $(x_2, y_2)$  的直線斜率  $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ,  $x_2 \neq x_1$ .

3. 等比數列  $\langle ar^{n-1} \rangle$  的前  $n$  項之和  $S_n = \frac{a \cdot (1 - r^n)}{1 - r}$ ,  $r \neq 1$ .

4.  $\triangle ABC$  的正弦及餘弦定理

(1)  $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ,  $R$  為外接圓的半徑(正弦定理)

(2)  $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$  (餘弦定理)

5. 統計公式：

算術平均數  $M(=\bar{X}) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

標準差  $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2}$

6. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ;  $\sqrt{3} \approx 1.732$ ;  $\sqrt{5} \approx 2.236$ ;  $\sqrt{6} \approx 2.449$ ;  $\pi \approx 3.142$

7. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ,  $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ,  $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ,  $\log_{10} 7 \approx 0.8451$