

大學入學考試中心  
107 學年度指定科目考試試題  
數學甲

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

- 作答方式：
- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
  - 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
  - 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
  - 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是  $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是  $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的  $\boxed{\textcircled{3}}$  與第 19 列的  $\boxed{\textcircled{8}}$  畫記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

例：若第 C 題的答案格式是  $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是  $\frac{-7}{50}$  時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的  $\boxed{\textcircled{-}}$  與第 21 列的  $\boxed{\textcircled{7}}$  畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	<input checked="" type="checkbox"/>	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設  $A$  為  $3 \times 3$  矩陣，且對任意實數  $a, b, c$ ， $A \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} b \\ c \\ a \end{bmatrix}$  均成立。試問矩陣  $A^2 \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}$  為何？

(1)  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$

(2)  $\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$

(3)  $\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

(4)  $\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{bmatrix}$

(5)  $\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$

2. 坐標平面上，考慮  $A(2,3)$  與  $B(-1,3)$  兩點，並設  $O$  為原點。令  $E$  為滿足

$\overrightarrow{OP} = a \overrightarrow{OA} + b \overrightarrow{OB}$  的所有點  $P$  所形成的區域，其中  $-1 \leq a \leq 1$ ， $0 \leq b \leq 4$ 。考慮函數

$f(x) = x^2 + 5$ ，試問當限定  $x$  為區域  $E$  中的點  $P(x, y)$  的橫坐標時， $f(x)$  的最大值為何？

(1) 5

(2) 9

(3) 30

(4) 41

(5) 54

3. 某零售商店販賣「熊大」與「皮卡丘」兩種玩偶，其進貨來源有  $A, B, C$  三家廠商。已知此零售商店從每家廠商進貨的玩偶總數相同，且三家廠商製作的每一種玩偶外觀也一樣，而從  $A, B, C$  這三家廠商進貨的玩偶中，「皮卡丘」所占的比例分別為  $\frac{1}{4}$ 、 $\frac{2}{5}$ 、 $\frac{1}{2}$ 。阿德從這家零售商店隨機挑選一隻「皮卡丘」送給小安作為生日禮物，試問此「皮卡丘」出自  $C$  廠商的機率為何？

- (1)  $\frac{1}{3}$   
(2)  $\frac{2}{5}$   
(3)  $\frac{10}{23}$   
(4)  $\frac{10}{19}$   
(5)  $\frac{5}{9}$

## 二、多選題（占 40 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

4. 設  $f(x) = -x^2 + 499$ ，且

$$A = \int_0^{10} f(x) dx, \quad B = \sum_{n=0}^9 f(n), \quad C = \sum_{n=1}^{10} f(n), \quad D = \sum_{n=0}^9 \frac{f(n) + f(n+1)}{2}$$

試選出正確的選項。

- (1)  $A$  表示在坐標平面上函數  $y = -x^2 + 499$  的圖形與直線  $y = 0$ 、 $x = 0$ 、 $x = 10$  所圍成的有界區域的面積  
(2)  $B < C$   
(3)  $B < A$   
(4)  $C < D$   
(5)  $A < D$

5. 坐標平面上，已知直線  $L$  與函數  $y = \log_2 x$  的圖形有兩個交點  $P(a, b), Q(c, d)$ ，且  $\overline{PQ}$  的中點在  $x$  軸上。試選出正確的選項。

- (1)  $L$  的斜率大於 0
- (2)  $bd = -1$
- (3)  $ac = 1$
- (4)  $L$  的  $y$  截距大於  $-1$
- (5)  $L$  的  $x$  截距大於 1

6. 坐標空間中，有  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$ 、 $\vec{d}$  四個向量，滿足外積  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{c}$ ， $\vec{a} \times \vec{c} = \vec{d}$ ，且  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  的向量長度均為 4。設向量  $\vec{a}$  與  $\vec{b}$  的夾角為  $\theta$ （其中  $0 \leq \theta \leq \pi$ ），試選出正確的選項。

- (1)  $\cos \theta = \frac{1}{4}$
- (2)  $\vec{a}$ 、 $\vec{b}$ 、 $\vec{c}$  所張出的平行六面體的體積為 16
- (3)  $\vec{a}$ 、 $\vec{c}$ 、 $\vec{d}$  兩兩互相垂直
- (4)  $\vec{d}$  的長度等於 4
- (5)  $\vec{b}$  與  $\vec{d}$  的夾角等於  $\theta$

7. 設  $O$  為複數平面上的原點，並令點  $A, B$  分別代表複數  $z_1, z_2$ ，且滿足  $|z_1|=2$ ， $|z_2|=3$ ，

$|z_2 - z_1| = \sqrt{5}$ 。若  $\frac{z_2}{z_1} = a + bi$ ，其中  $a, b$  為實數， $i = \sqrt{-1}$ 。試選出正確的選項。

(1)  $\cos \angle AOB = \frac{2}{3}$

(2)  $|z_2 + z_1| = \sqrt{23}$

(3)  $a > 0$

(4)  $b > 0$

(5) 設點  $C$  代表  $\frac{z_2}{z_1}$ ，則  $\angle BOC$  可能等於  $\frac{\pi}{2}$

8. 設  $f(x)$  為一定義在非零實數上的實數值函數。已知極限  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \frac{|x|}{x}$  存在，試選出正確的選項。

(1)  $\lim_{x \rightarrow 0} \left( \frac{x}{|x|} \right)^2$  存在

(2)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) \frac{x}{|x|}$  存在

(3)  $\lim_{x \rightarrow 0} (f(x) + 1) \frac{x}{|x|}$  存在

(4)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)$  存在

(5)  $\lim_{x \rightarrow 0} f(x)^2$  存在

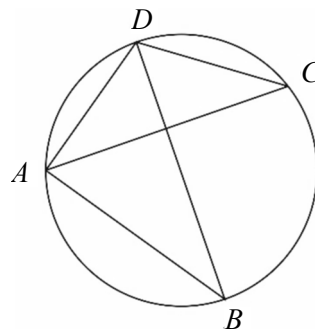
### 三、選填題（占 18 分）

說明：1.第 A 至 C 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號 (9–15)。  
2.每題完全答對給 6 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 坐標平面上，已知圓  $C$  通過點  $P(0, -5)$ ，其圓心在  $x=2$  上。若圓  $C$  截  $x$  軸所成之弦長為 6，則其半徑為  $\sqrt{\textcircled{9}\textcircled{10}}$ 。（化成最簡根式）

B. 假設某棒球隊在任一局發生失誤的機率都等於  $p$ （其中  $0 < p < 1$ ），且各局之間發生失誤與否互相獨立。令隨機變數  $X$  代表一場比賽 9 局中出現失誤的局數，且令  $p_k$  代表 9 局中恰有  $k$  局出現失誤的機率  $P(X = k)$ 。已知  $p_4 + p_5 = \frac{45}{8} p_6$ ，則該球隊在一場 9 局的比賽中出現失誤局數的期望值為  $\frac{\textcircled{11}\textcircled{12}}{\textcircled{13}}$ 。（化成最簡分數）

- C. 設  $A, B, C, D$  為圓上的相異四點。已知圓的半徑為  $\frac{7}{2}$ ， $\overline{AB} = 5$ ，兩線段  $\overline{AC}$  與  $\overline{BD}$  互相垂直，如圖所示（此為示意圖，非依實際比例）。則  $\overline{CD}$  的長度為 14  $\sqrt{15}$ 。  
（化成最簡根式）



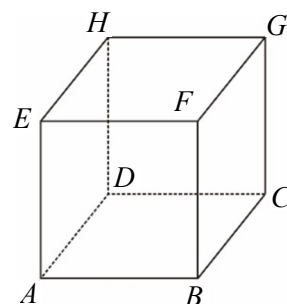
— — — — — 以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷 — — — — —

## 第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。若因字跡潦草、未標示題號、標錯題號等原因，致評閱人員無法清楚辨識，其後果由考生自行承擔。每一子題配分標於題末。

一. 坐標空間中有一個正立方體  $ABCDEFGH$ ，如圖所示（此為示意圖），試回答下列問題。

- (1) 試證明  $A$  點到平面  $BDE$  的距離是對角線  $AG$  長度的三分之一。（4 分）
- (2) 試證明向量  $\overrightarrow{AG}$  與平面  $BDE$  垂直。（2 分）
- (3) 如果知道平面  $BDE$  的方程式為  $2x+2y-z=-7$ ，且  $A$  點坐標為  $(2,2,6)$ ，試求出  $A$  點到平面  $BDE$  的距離。（2 分）
- (4) 承(3)，試求出  $G$  點的坐標。（4 分）



二. 考慮三次多項式  $f(x)=-x^3-3x^2+3$ 。試回答下列問題。

- (1) 在坐標平面上，試描繪  $y=f(x)$  的函數圖形，並標示極值所在點之坐標。（4 分）
- (2) 令  $f(x)=0$  的實根為  $a_1, a_2, a_3$ ，其中  $a_1 < a_2 < a_3$ 。試求  $a_1, a_2, a_3$  分別在哪兩個相鄰整數之間。（2 分）
- (3) 承(2)，試說明  $f(x)=a_1$ 、 $f(x)=a_2$ 、 $f(x)=a_3$  各有幾個相異實根。（4 分）
- (4) 試求  $f(f(x))=0$  有幾個相異實根（註： $f(f(x))=-(f(x))^3-3(f(x))^2+3$ ）。（2 分）