大學入學考試中心
106 學年度指定科目考試試題
數學甲

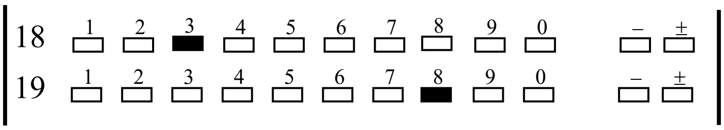
—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

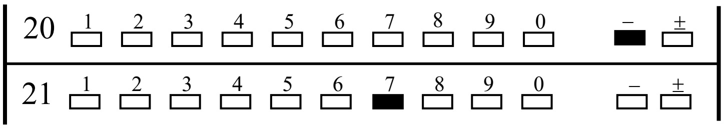
作答方式：
- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{⑱}{⑲}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\underset{\square}{3}$ 與第 19 列的 $\underset{\square}{8}$ 畫記，如：



例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{⑳㉑}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\underset{\square}{-}$ 與第 21 列的 $\underset{\square}{7}$ 畫記，如：



第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

一、單選題（占 24 分）

說明：第1題至第4題，每題有5個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得6分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 從所有二位正整數中隨機選取一個數，設 p 是其十位數字小於個位數字的機率。關於 p 值的範圍，試選出正確的選項。

(1) $0.22 \le p < 0.33$

(2) $0.33 \le p < 0.44$

(3) $0.44 \le p < 0.55$

(4) $0.55 \le p < 0.66$

(5) $0.66 \le p < 0.77$

2. 設 $a = \sqrt[3]{10}$。關於 a^5 的範圍，試選出正確的選項。

(1) $25 \le a^5 < 30$

(2) $30 \le a^5 < 35$

(3) $35 \le a^5 < 40$

(4) $40 \le a^5 < 45$

(5) $45 \le a^5 < 50$

3. 試問在 $0 \le x \le 2\pi$ 的範圍中，$y = 3\sin x$ 的函數圖形與 $y = 2\sin 2x$ 的函數圖形有幾個交點？

(1) 2 個交點

(2) 3 個交點

(3) 4 個交點

(4) 5 個交點

(5) 6 個交點

4. 已知一實係數三次多項式 $f(x)$ 在 $x = 1$ 有極大值 3，且圖形 $y = f(x)$ 在 $(4, f(4))$ 之切線方程式為 $y - f(4) + 5(x-4) = 0$，試問 $\int_1^4 f''(x)dx$ 之值為下列哪一選項？

(1) -5

(2) -3

(3) 0

(4) 3

(5) 5

二、多選題（占 24 分）

說明：第5題至第7題，每題有5個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得8分；答錯1個選項者，得4.8分；答錯2個選項者，得1.6分；答錯多於2個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

5. 設$\overrightarrow{u}$與$\overrightarrow{v}$為兩非零向量，夾角為120°。若$\overrightarrow{u}$與$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$垂直，試選出正確的選項。

(1) $\overrightarrow{u}$的長度是$\overrightarrow{v}$的長度的 2 倍

(2) $\overrightarrow{v}$與$\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$的夾角為30°

(3) $\overrightarrow{u}$與$\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$的夾角為銳角

(4) $\overrightarrow{v}$與$\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$的夾角為銳角

(5) $\overrightarrow{u}+\overrightarrow{v}$的長度大於$\overrightarrow{u}-\overrightarrow{v}$的長度

6. 已知複數 z 滿足 $z^n+z^{-n}+2=0$，其中 n 為正整數。將 z 用極式表示為 $r(\cos\theta+i\sin\theta)$，且 $r>0$。試選出正確的選項。

(1) $r=1$

(2) n 不能是偶數

(3) 對給定的 n，恰有 $2n$ 個不同的複數 z 滿足題設

(4) θ可能是 $\frac{3\pi}{7}$

(5) θ可能是 $\frac{4\pi}{7}$

7. 設實係數三次多項式 $f(x)$ 的首項係數為正。已知 $y=f(x)$ 的圖形和直線 $y=g(x)$ 在 $x=1$ 相切，且兩圖形只有一個交點。試選出正確的選項。

(1) $f(1)=g(1)$

(2) $f'(1)=g'(1)$

(3) $f''(1)=0$

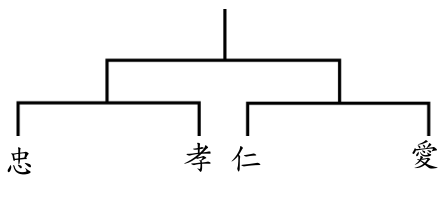
(4) 存在實數 $a\neq1$ 使得 $f'(a)=g'(a)$

(5) 存在實數 $a\neq1$ 使得 $f''(a)=g''(a)$

三、選填題（占 28 分）

說明：1.第 A 至 D 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號 (8–18)。
2.每題完全答對給 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 某高中一年級有忠、孝、仁、愛四班的籃球隊，擬由經抽籤決定的下列賽程進行單淘汰賽（輸一場即被淘汰）：



假設忠班勝過其他任何一班的機率為 $\frac{4}{5}$，孝班勝過其他任何一班的機率為 $\frac{1}{5}$，仁、愛兩班的實力相當，勝負機率各為 $\frac{1}{2}$。若任一場比賽皆須分出勝負，沒有和局。如果冠軍隊可獲得 6000 元獎學金，亞軍隊可獲得 4000 元獎學金，則孝班可獲得獎學金的期望值為 ⑧⑨⑩ 元。

B. 坐標平面上有三條直線 L、L_1、L_2，其中 L 為水平線，L_1、L_2 的斜率分別為 $\frac{3}{4}$、$-\frac{4}{3}$。已知 L 被 L_1、L_2 所截出的線段長為 30，則 L、L_1、L_2 所決定的三角形的面積為 ⑪⑫⑬ 。

C. 坐標平面上，x 坐標與 y 坐標均為整數的點稱為格子點。令 n 為正整數，T_n 為平面上以直線 $y=\frac{-1}{2n}x+3$，以及 x 軸、y 軸所圍成的三角形區域（包含邊界），而 a_n 為 T_n 上的格子點數目，則 $\lim_{n\to\infty}\frac{a_n}{n}=$ ⑭⑮ 。

D. 坐標空間中，平面 $ax+by+cz=0$ 與平面 $x=0$、$x+\sqrt{3}y=0$ 的夾角（介於 $0°$ 到 $90°$ 之間）都是 $60°$，且 $a^2+b^2+c^2=12$，則 $(a^2, b^2, c^2)=($ ⑯ , ⑰ , ⑱ $)$。

－－－－－ 以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷 －－－－－

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一. 在坐標平面上，考慮二階方陣 $A=\frac{1}{5}\begin{bmatrix}4 & -3\\ 3 & 4\end{bmatrix}$ 所定義的線性變換。對於平面上異於原點 O 的點 P_1，設 P_1 經 A 變換成 P_2，P_2 經 A 變換成 P_3。令 $a=\overline{OP_1}$。

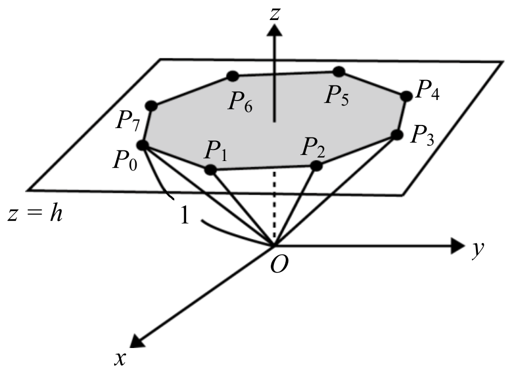
(1) 試求 $\sin(\angle P_1OP_3)$。（4 分）

(2) 試以 a 表示 $\Delta P_1P_2P_3$ 的面積。（4 分）

(3) 假設 P_1 是圖形 $y=\frac{1}{10}x^2-10$ 上的動點，試求 $\Delta P_1P_2P_3$ 面積的最小可能值。（4 分）

背 面 尚 有 試 題

二、坐標空間中，$O(0,0,0)$為原點。平面 $z=h$（其中 $0\le h\le 1$）上有一以 $(0,0,h)$為圓心的圓，在此圓上依逆時鐘順序取 8 點構成正八邊形 $P_0P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$，使得各線段 $\overline{OP_j}$ $(0\le j\le 7)$的長度都是 1。請參見示意圖。



(1) 試以 h 表示向量內積 $\overrightarrow{OP_0}\cdot\overrightarrow{OP_4}$。（4 分）

(2) 若 $V(h)$為以 O 為頂點、正八邊形 $P_0P_1P_2P_3P_4P_5P_6P_7$ 為底的正八角錐體積，試將 $V(h)$表為 h的函數（註:角錐體積$=\frac{1}{3}$底面積$\times$高）。（2 分）

(3) 在 $\overrightarrow{OP_0}$和 $\overrightarrow{OP_4}$ 夾角不超過 $90°$的條件下，試問正八角錐體積 $V(h)$的最大值為何？（6 分）