大學入學考試中心
105 學年度指定科目考試試題
數學甲

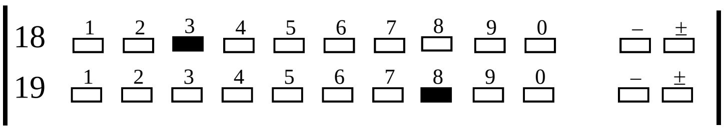
—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

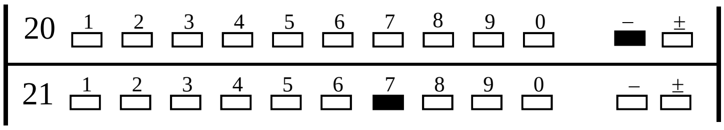
作答方式：
- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答案卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案；或未使用黑色墨水的筆書寫答案卷，致評閱人員無法辨認機器掃描後之答案者，其後果由考生自行承擔。
- 答案卷每人一張，不得要求增補。

選填題作答說明：選填題的題號是 A，B，C，……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\dfrac{18}{19}$，而依題意計算出來的答案是$\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答案卡上的第 18 列的 3 與第 19 列的 8 畫記，如：



例：若第 C 題的答案格式是 $\dfrac{20\,21}{50}$，而答案是$\dfrac{-7}{50}$時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 − 與第 21 列的 7 畫記，如：



第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

一、單選題（占 **24** 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 請問下列選項中哪一個數值 a 會使得 x 的方程式 $\log a - \log x = \log(a-x)$ 有兩相異實數解？

(1) $a=1$

(2) $a=2$

(3) $a=3$

(4) $a=4$

(5) $a=5$

2. 下列哪一個選項的數值最接近 $\cos(2.6\pi)$？

(1) $\sin(2.6\pi)$

(2) $\tan(2.6\pi)$

(3) $\cot(2.6\pi)$

(4) $\sec(2.6\pi)$

(5) $\csc(2.6\pi)$

3. 假設三角形 ABC 的三邊長分別為 $\overline{AB}=5$、$\overline{BC}=8$、$\overline{AC}=6$。請選出和向量 $\overrightarrow{AB}$ 的內積為最大的選項。

(1) $\overrightarrow{AC}$

(2) $\overrightarrow{CA}$

(3) $\overrightarrow{BC}$

(4) $\overrightarrow{CB}$

(5) $\overrightarrow{AB}$

4. 假設 a, b 皆為非零實數，且坐標平面上二次函數 $y=ax^2+bx$ 與一次函數 $y=ax+b$ 的圖形相切。請選出切點所在位置為下列哪一個選項。

(1) 在 x 軸上

(2) 在 y 軸上

(3) 在第一象限

(4) 在第四象限

(5) 當 $a>0$ 時，在第一象限；當 $a<0$ 時，在第四象限

二、多選題（占 24 分）

說明：第 5 題至第 7 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

5. 在坐標空間中，點 $P(2,2,1)$ 是平面 E 上距離原點 $O(0,0,0)$ 最近的點。請選出正確的選項。

(1) 向量 $\overrightarrow{v}=(1,-1,0)$ 為平面 E 的法向量

(2) 點 P 也是平面 E 上距離點 $(4,4,2)$ 最近的點

(3) 點 $(0,0,9)$ 在平面 E 上

(4) 點 $(2,2,-8)$ 到平面 E 的距離為 9

(5) 通過原點和點 $(2,2,-8)$ 的直線與平面 E 會相交

6. 坐標平面上一矩形，其頂點分別為 $A(3,-2)$、$B(3,2)$、$C(-3,2)$、$D(-3,-2)$。設二階方陣 M 為在坐標平面上定義的線性變換，可將 A 映射到 B 且將 B 映射到 C。請選出正確的選項。

(1) M 定義的線性變換是鏡射變換

(2) $M\begin{bmatrix} 3 & 3 \\ -2 & 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 3 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

(3) M 定義的線性變換將 C 映射到 D 且將 D 映射到 A

(4) M 的行列式值為 -1

(5) $M^3=-M$

7. 在實數線上，動點 A 從原點開始往正向移動，動點 B 從 8 的位置開始往負向移動。兩個動點每一秒移動一次，已知第一秒 A、B 移動的距離分別為 1、4，且 A、B 每次移動的距離分別為其前一次移動距離的 $\frac{1}{2}$ 倍、$\frac{1}{3}$ 倍。令 c_n 為第 n 秒時 A、B 的中點位置。請選出正確選項。

(1) $c_1=\frac{5}{2}$

(2) $c_2>c_1$

(3) 數列 $\langle c_{n+1}-c_n\rangle$ 是一個等比數列

(4) $\lim\limits_{n\to\infty}c_n=2$

(5) $c_{1000}>2$

三、選填題（占 28 分）

說明：1.第 A 至 D 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號 (8–21)。 2.每題完全答對給 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 投擲一枚均勻銅板8次。在最初兩次的投擲中曾經出現過正面的條件下，8次投擲中恰好出現3次正面的條件機率為 $\dfrac{⑧}{⑨⑩}$。（化成最簡分數）

B. 設 $\overrightarrow{u}=(1,2,3)$ 、$\overrightarrow{v}=(1,0,-1)$ 、$\overrightarrow{w}=(x,y,z)$ 為空間中三個向量，且向量 $\overrightarrow{w}$ 與向量 $\overrightarrow{u}\times\overrightarrow{v}$ 平行。若行列式 $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3\\ 1 & 0 & -1\\ x & y & z\end{vmatrix}=-12$，則 $\overrightarrow{w}=$（ ⑪ ， ⑫⑬ ， ⑭ ）。

C. 在所有滿足 $z-\bar{z}=-3i$ 的複數 z 中（其中 $\bar{z}$ 為 z 的共軛複數，$i=\sqrt{-1}$ ），$\left|\sqrt{7}+8i-z\right|$ 的最小值為 $\dfrac{⑮⑯}{⑰}$。（化成最簡分數）

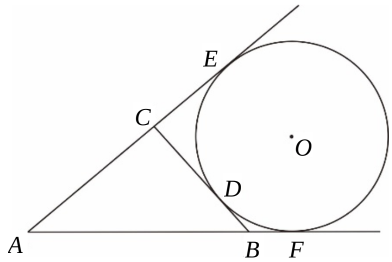
D. 一圓盤分成標有數字0、1的兩區域，且圓盤上有一可轉動的指針。已知每次轉動指針後，前後兩次指針停在同一區域的機率為 $\frac{1}{4}$，而停在不同區域的機率為 $\frac{3}{4}$。遊戲規則為連續轉動指針三次，計算指針在這三次所停區域的標號數字之和。若遊戲前指針的位置停在標號數字為1的區域，則此遊戲的期望值為 $\dfrac{⑱⑲}{⑳㉑}$。（化成最簡分數）

————— 以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷 —————

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、……），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一.　如圖，已知圓 O 與直線 BC、直線 AC、直線 AB 均相切，且分別相切於 D、E、F。又 $\overline{BC}=4, \overline{AC}=5, \overline{AB}=6$。



(1) 假設 $\overline{BF}=x$，試利用 x 分別表示 $\overline{BD}$，$\overline{CD}$ 以及 $\overline{AE}$，並求出 x 之值。（4分）

(2) 若將 $\overrightarrow{AD}$ 表示成 $\alpha\overrightarrow{AB}+\beta\overrightarrow{AC}$，則 α, β 之值為何？（5分）

二.　設三次實係數多項式 $f(x)$ 的最高次項係數為 a。已知在 $0\le x\le 3$ 的範圍中，$f(x)$ 的最大值 12 發生在 $x=0, x=2$ 兩處。另一多項式 $G(x)$ 滿足 $G(0)=0$，以及對任意實數 $s,r\ (s\le r)$，$\int_s^r f(t)\,dt = G(r)-G(s)$ 恆成立，且函數 $y=G(x)$ 在 $x=1$ 處有（相對）極值。

(1) 試描繪 $y=f(x)$ 在 $0\le x\le 3$ 的範圍中可能的圖形，在圖上標示 $(0, f(0))$、$(2, f(2))$，並由此說明 a 為正或負。（4分）

(2) 試求方程式 $f(x)-12=0$ 的實數解（如有重根須標示），並利用 $y=G(x)$ 在 $x=1$ 處有極值，求 a 之值。（5分）

(3) 在 $0\le x\le 2$ 的範圍中，求 $G(x)$ 之最小值。（6分）