100學年度指定科目考試數學甲非選擇題考生作答情形分析

第一處　朱惠文

每年指考成績單寄發後，總有些考生認為自己的數學甲非選擇題，答案明明正確，為何無法得到該題的滿分，甚至1分未得？本文就此一疑問，說明本年度數學甲非選擇題僅得到部分題分或是1分未得的可能情形，以及數學科非選擇題給分的大原則，希望能藉此廓清部分考生的疑惑。以下各題將從兩方面進行分析，(一)是正確的解題步驟，(二)是考生解題的錯誤概念或解法。至於各題的參考解法可詳見二、參考解法示例。

一、正確解題步驟及錯誤解法說明

第一題

題目： 已知實係數三次多項式函數 $y=f(x)$ 的最高次項係數為12，其圖形與水平線 $y=25$ 交於相異的三點 $(0,25),(1,25)$ 及 $(2,25)$。

(1) 試求曲線 $y=f(x)$ 圖形上的反曲點坐標。(6分)

(2) 試求定積分 $\int_0^2 f(x)\,dx$ 之值。(6分)

分析：

第(1)小題

(一)正確解題步驟

本題評量多項式函數微分與積分的概念與應用，試題分為兩小題，題幹提供一實係數三次多項式的首項係數，及其圖形與一水平線的交點坐標。第(1)小題為求此圖形的反曲點坐標，第(2)小題則求定積分 $\int_0^2 f(x)\,dx$ 的值。第(1)小題多數人採用的解法有兩種：一是找出多項式，另一個是利用多項式圖形的性質。採第一種解法者，需先根據題意列出多項式，例如 $f(x)=12x(x-1)(x-2)+25$，或設 $f(x)=12x^3+bx^2+cx+d$，由試題所給條件推得 $f(x)$。再由反曲點與二階導函數的關係，即 $f''(x)=12(6x-6)$，與 $f''(x)=0$，得反曲點坐標為 $(1,25)$。第二種解法則將題意所求的多項式圖形 $y=f(x)$ 視為 $y=12x(x-1)(x-2)$ 的圖形上移25單位，所以兩者的反曲點之 x 坐標相同，且 $y=12x(x-1)(x-2)$ 的圖形對稱於點 $(1,0)$，故反曲點坐標為 $(1,25)$。

（二）錯誤概念或解法

以下依據上述的解題概念，分析此小題得部分分數或未得分的幾種情形。

(A1) 列錯多項式方程式：例如誤以為首項係數為 1；或解聯立方程組錯誤；或誤解題意為 $y=12x(x-1)(x-2)$ 的圖形下移 25 單位，而誤為 $f(x)=12x(x-1)(x-2)-25$。

(A2) 理由不夠充分：例如只說 $y=12x(x-1)(x-2)$ 反曲點的 x 坐標為 1，並未提及所求圖形與 $y=12x(x-1)(x-2)$ 圖形的關係，也未提及所求圖形對稱於點 $(1,25)$。或誤以為極值發生在 $x=\dfrac{3}{2}$ 與 $x=\dfrac{1}{2}$ 處，而據以說反曲點的 x 坐標為兩者的平均值。

(A3) 完整寫出作答過程，但計算錯誤：例如寫出正確的 $f(x)$，但微分過程錯誤，如 $f''(x)=72x+72$，或寫出正確的 $f''(x)$，但求解 $f''(x)=0$ 時，得 $x=-1$，等等。

以上這些情形，有些雖寫出了正確的反曲點坐標 $(1,25)$，但解題概念錯誤或未提正確理由；或解題概念正確，但計算錯誤，以至於只能得到部分分數，甚或無法得分。

第(2)小題

（一）正確解題步驟

根據第 (1) 小題，得出 $f(x)=12x^3-36x^2+24x+25$。故 $\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2(12x^3-36x^2+24x+25)\,dx=3x^4-12x^3+12x^2+25x\Big|_0^2=50$ 或因為 $y=f(x)$ 的圖形對稱於點 $(1,25)$，所以 $\int_0^2 f(x)dx=25\times2=50$。

（二）錯誤概念或解法

以下依據上述的解題概念，分析此小題得部分分數或未得分的幾種情形。

(B1) 反導函數算錯或圖形概念錯誤：例如能寫出正確的 $f(x)$，但反導函數寫成 $3x^4-12x^3+12x^2+25\Big|_0^2$；或誤以為求 $\int_0^2[12x(x-1)(x-2)]\,dx$ 等等；或誤認為三次多項式函數圖形對稱於反曲點 $(1,25)$，而得到錯誤的 $\int_0^2 f(x)dx=2\int_0^1 f(x)dx$。

(B2) 說明理由不夠充分：例如直接寫 $\int_0^2 f(x)dx=50$，未說明任何理由。

(B3) 完整寫出作答過程，但計算錯誤：例如反導函數正確，但計算錯誤，如 $\int_0^2 f(x)dx=3x^4-12x^3+12x^2+25x\Big|_0^2=96$。

本題出自高三選修數學(II)的範圍，而且解題概念各版本均提及，例如三次函數圖形的性質、二階導函數的概念、多項式函數的積分等。對考生而言，應不難正確作答。不過數學科非選擇題主要評量用數學式清楚表達解題過程的能力，因此列式、推理過程是否正確、邏輯判斷是否合理，均為評定分數的重要依據，並非僅看答案而已。

第二題

題目：(1) 試求所有滿足 $\log(x^3-12x^2+41x-20)\geq 1$ 的 x 值之範圍。（6 分）

(2) 試證：當 $\dfrac{3\pi}{2}\leq\theta\leq 2\pi$ 時，$3^{\cos\theta}\geq 3^{1+\sin\theta}$。（6 分）

分析：

第(1)小題

（一）正確解題步驟

本題評量指數與對數單元，試題分為二小題，第(1)小題根據題幹所給算式，求解 x 值之範圍。解題可分為以下三個步驟：

(1) 根據對數定義，可得 $x^3-12x^2+41x-20>0$ 且 $x^3-12x^2+41x-20\geq 10$。由於第二式成立時，第一式必成立，故僅需求 $x^3-12x^2+41x-20\geq 10$ 之解。

(2) 移項分解因式得 $(x-1)(x-5)(x-6)\geq 0$

(3) 推得 x 值之範圍為 $x\geq 6$ 或 $1\leq x\leq 5$。

（二）錯誤概念或解法

以下依據上述的解題概念，分析此小題得部分分數或未得分的幾種情形。

(C1) 不清楚對數定義：例如誤以為 $1=\log 0$；或 $x^3-12x^2+41x-20\leq 10$；或 $x^3-12x^2+41x-20=10$。另一錯誤為以為只要求解 $x^3-12x^2+41x-20>0$。

(C2) 移項因式分解錯誤：例如誤為 $x^3-12x^2+41x-10\geq 0$ 或 $(x+1)(x+5)(x+6)\geq 0$ 等等。

(C3) 範圍判斷錯誤：例如誤以為 x 值之範圍為 $x\leq 1$ 或 $6\geq x\geq 5$；或 $x\geq 6$ 或 $1\geq x\geq 5$；或 $x>6$ 或 $1<x<5$ 等等。

(C4) 完整寫出作答過程，但計算錯誤：例如因式分解正確，但範圍寫成 $x\geq -1$ 或 $-6\leq x\leq -5$ 等等。

以上這幾種情形，有些不清楚基本數學概念，例如；對數的性質；有些寫出完整的作答過程，可是計算錯誤，例如移項錯誤，以至於僅能得到部分分數或無法得分。

第(2)小題

（一）正確解題步驟

本小題為一證明題，過程所引用的條件與算式，其前後關係需說明清楚，且邏輯判斷需正確，方能拿到分數，此題可從不同的角度(解法)證明，其過程大致可分為三個步驟：

(1) 利用指數的性質，推得 $3^{\cos\theta} \ge 3^{1+\sin\theta}$ 等價於 $\cos\theta \ge 1+\sin\theta$。

(2) 確定所要採用的方法，例如和角公式、半角公式、三角形兩邊長的和大於第三邊、正弦與餘弦函數圖形、平方關係等。

(3) 根據第(2)步驟所採用的解法，連結題意所給角度的限制，正確寫出所應用的條件，完整說明論證過程。

（二）錯誤概念或解法

以下依據上述的解題概念，分析此小題得部分分數或未得分的幾種情形。

(D1) 所採用的解法不正確：例如欲採用和角公式作答，但公式錯誤，如誤寫 $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\cos(\theta-\frac{\pi}{4})$；或採半角公式，但誤以為 $\cos^2\theta=2\cos^2\frac{\theta}{2}-1$等等。

(D2) 所引用的條件不足以證明：例如採和角解法，但未說明角度範圍，如寫出 $\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\cos(\theta+\frac{\pi}{4})$，直接得證 $\cos\theta-\sin\theta\ge 1$，並未說明因 $\frac{7}{4}\pi\le\theta+\frac{\pi}{4}\le\frac{9}{4}\pi$，故 $\sqrt{2}\cos(\theta+\frac{\pi}{4})\ge 1$；或只畫出正、餘弦函數圖形，並不足以證明原題成立，需再說明正、餘弦函數在 $\frac{3\pi}{2}$，2π 的值相同，且當 $\frac{3\pi}{2}\le\theta\le 2\pi$ 時，$\cos\theta$圖形凹向下，$1+\sin\theta$圖形凹向上，才能得到 $\cos\theta\ge 1+\sin\theta$的結論。

以上這幾種情形，有的不清楚或記錯公式，例如半角公式、和角公式等；有些未檢驗條件的充分性與一致性，例如只寫 $\cos\theta\ge 0$，並不能得到 $2\sin\theta(1+\sin\theta)\le 0$ 的結論，需再說明 $\sin\theta\le 0$才能得證。

數學甲與數學乙的題型有選擇、選填與非選擇題。選擇題與選填題，只要答案正確，即可得到全部分數。但非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。本文說明正確的解題概念與步驟，以及得部分分數與無法得分的可能情形，期能有助於老師教學或學生平常練習。

二、參考解法示例

數學科試題的解法不只一種，故以下提供多數考生可能採用的解法，未列的解法，只要推論或解題過程正確，仍可得分。

第一題

(1) 【法一】

由函數 $y = f(x)$ 的最高次項係數為 12，且 $f(0)=f(1)=f(2)=25$，可推得 $f(x) = 12x(x-1)(x-2)+25 = 12x^3-36x^2+24x+25$。

或設 $f(x)=12x^3+bx^2+cx+d$，由 $f(0)=f(1)=f(2)=25$得

$$\begin{cases} d=25 \\ 12+b+c+d=25 \\ 96+4b+2c+d=25 \end{cases}$$

解得 $b=-36$、$c=24$、$d=25$。

故 $f'(x)=12(3x^2-6x+2)$，$f''(x)=12(6x-6)$

令 $f''(x)=0$，得函數 $y = f(x)$ 圖形上的反曲點坐標為 $(1, 25)$

【法二】

因為 $y=f(x)$ 的圖形為將 $y=12x(x-1)(x-2)$ 的圖形上移 25 單位，所以兩者的反曲點之 x 坐標相同，而 $y=12x(x-1)(x-2)$ 的圖形對稱於點 $(1, 0)$。

故 $y=f(x)$ 圖形的反曲點坐標為 $(1, 25)$

(2) 【法一】

$$\int_0^2 f(x)dx=\int_0^2 12(x^3-3x^2+2x)+25\,dx$$

$$=3x^4-12x^3+12x^2+25x\Big|_0^2$$

$$=3\times2^4-12\times2^3+12\times2^2+25\times2=50$$

【法二】

因為 $(1,0)$ 是 $g(x)=12x(x-1)(x-2)$ 的反曲點，以及 $y=g(x)$ 的圖形對稱於反曲點，

故 $\int_0^2 g(x)\,dx=\int_0^1 g(x)\,dx+\int_1^2 g(x)\,dx=\int_0^1 g(x)\,dx-\int_0^1 g(x)\,dx=0$。

因此 $\int_0^2 f(x)\,dx=\int_0^2 (g(x)+25)\,dx=\int_0^2 g(x)\,dx+\int_0^2 25\,dx=0+25x\Big|_0^2=50$ 。

所以 $\int_0^2 f(x)dx=25\times 2=50$

第二題

(1) 由題意得 $\log(x^3-12x^2+41x-20)\geq 1$

$\Leftrightarrow\ x^3-12x^2+41x-20\geq 10$ 且 $x^3-12x^2+41x-20>0$

$\Leftrightarrow\ x^3-12x^2+41x-30\geq 0$

$\Leftrightarrow\ (x-1)(x-5)(x-6)\geq 0$

因此，滿足 $\log(x^3-12x^2+41x-20)\geq 1$ 的 x 範圍為

$1\leq x\leq 5$ 或 $x\geq 6$

(2) 因為 $3^{\cos\theta}\geq 3^{1+\sin\theta}$ 等價於 $\cos\theta\geq 1+\sin\theta$，故僅需證明當 $\frac{3\pi}{2}\leq\theta\leq 2\pi$ 時，$\cos\theta\geq 1+\sin\theta$ 。

【法一】

$\cos\theta-\sin\theta=\sqrt{2}\cos(\theta+\frac{\pi}{4})$

因 $\frac{7}{4}\pi\leq\theta+\frac{\pi}{4}\leq\frac{9}{4}\pi$ ，所以 $\sqrt{2}\cos(\theta+\frac{\pi}{4})\geq 1$

得 $\cos\theta-\sin\theta\geq 1\ \Leftrightarrow\ \cos\theta\geq 1+\sin\theta\Leftrightarrow 3^{\cos\theta}\geq 3^{1+\sin\theta}$ ，得證

【法二】

$\sin\theta-\cos\theta=\sqrt{2}\sin(\theta-\frac{\pi}{4})$

因 $\frac{5}{4}\pi\leq\theta-\frac{\pi}{4}\leq\frac{7}{4}\pi$ ，所以 $\sqrt{2}\sin(\theta-\frac{\pi}{4})\leq -1$

得 $\sin\theta-\cos\theta\leq -1\Leftrightarrow\ \cos\theta\geq 1+\sin\theta\Leftrightarrow 3^{\cos\theta}\geq 3^{1+\sin\theta}$ ，得證

【法三】

$(\cos\theta-\sin\theta)^2=1-2\cos\theta\sin\theta$

當 $\frac{3}{2}\pi\leq\theta\leq 2\pi$ ， $\sin\theta\leq 0$ ， $\cos\theta\geq 0$ ，推得 $-2\sin\theta\cos\theta\geq 0$

$1-2\cos\theta\sin\theta\geq 1\Leftrightarrow(\cos\theta-\sin\theta)^2\geq 1$

$\cos\theta\geq 1+\sin\theta\Leftrightarrow 3^{\cos\theta}\geq 3^{1+\sin\theta}$ ，得證

【法四】

$\cos^2\theta-(1+\sin\theta)^2=-2\sin^2\theta-2\sin\theta=-2\sin\theta(1+\sin\theta)$

當 $\frac{3}{2}\pi\le\theta\le 2\pi$， $\cos\theta\ge 0$， $\sin\theta\le 0$

推得 $-2\sin\theta(1+\sin\theta)\ge 0\Leftrightarrow\cos^2\theta\ge(1+\sin\theta)^2$

$\cos\theta\ge 1+\sin\theta\ \Leftrightarrow 3^{\cos\theta}\ge 3^{1+\sin\theta}$ ，得證

【法五】

當 $\frac{3}{2}\pi\le\theta\le 2\pi$， $\sin\theta\le 0$，故 $-\sin\theta=\sqrt{1-\cos^2\theta}$

$\sin^2\theta-(1-\cos\theta)^2=-2\cos^2\theta+2\cos\theta=-2\cos\theta(\cos\theta-1)$

因為 $\cos\theta\ge 0$，所以 $-2\cos\theta(\cos\theta-1)\ge 0$

$-\sin\theta\ge 1-\cos\theta\ \Leftrightarrow 3^{\cos\theta}\ge 3^{1+\sin\theta}$ ，得證

【法六】

$\frac{3\pi}{2}\le\theta\le 2\pi\Leftrightarrow\frac{3\pi}{4}\le\frac{\theta}{2}\le\pi$，所以 $\sin\frac{\theta}{2}\le-\cos\frac{\theta}{2}$ (or $\sin\frac{\theta}{2}+\cos\frac{\theta}{2}\le 0$)

因為 $\sin\frac{\theta}{2}\ge 0$，所以 $1-\cos\theta=2\sin^2\frac{\theta}{2}\le-2\sin\frac{\theta}{2}\cos\frac{\theta}{2}=-\sin\theta$。

$1-\cos\theta\le-\sin\theta\ \Leftrightarrow 3^{\cos\theta}\ge 3^{1+\sin\theta}$，得證。

【法七】

當 $\frac{3}{2}\pi\le\theta\le 2\pi$， $\sin\theta\le 0$，故 $\cos\theta\le 1-\sin\theta$

因 $\cos\theta\cos\theta=(1-\sin\theta)(1+\sin\theta)$ 且 $\cos\theta\ge 0$

所以 $\cos\theta\ge\sin\theta+1$

【法八】

$\cos\theta,\ 1+\sin\theta$ 在 $\frac{3\pi}{2},\ 2\pi$的值相同，且當 $\frac{3}{2}\pi\le\theta\le 2\pi$， $\cos\theta$ 圖形凹向下，$1+\sin\theta$圖形凹向上，所以 $\cos\theta\ge 1+\sin\theta$。

$\cos\theta\ge 1+\sin\theta\Leftrightarrow 3^{\cos\theta}\ge 3^{1+\sin\theta}$ ，得證。

【法九】

設 $(\cos\theta,\sin\theta)$ 為單位圓上一點(如右圖)，且 $\frac{3}{2}\pi\le\theta\le 2\pi$。

根據三角形兩邊差小於第三邊，推得 $|\cos\theta|\ge 1-|\sin\theta|$

因 $\cos\theta\ge 0$， $\sin\theta\le 0$，所以 $\cos\theta\ge 1+\sin\theta$

$3^{\cos\theta}\ge 3^{1+\sin\theta}$ ，得證。