

大學入學考試中心
100 學年度指定科目考試試題

數學甲

—作答注意事項—

考試時間：80 分鐘

作答方式：第壹部分請用 2B 鉛筆在答案卡之「解答欄」內畫記。修正時應以橡皮擦拭，切勿使用修正液（帶）。

第貳部分作答於「非選擇題答案卷」，請務必在規定之欄位使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。更正時，可以使用修正液（帶）。

第壹部分作答示例：請仔細閱讀下面的例子。

- (一) 單選題只用 1, 2, 3, 4, 5 等五個格子，而不需要用到 -, ± 以及 6, 7, 8, 9, 0 等格子；多選題只用 1, 2, 3, 4 等四個格子，而不需要用到 -, ± 以及 5, 6, 7, 8, 9, 0 等格子。

例：若第 1 題為單選題，選項為(1)3 (2)5 (3)7 (4)9 (5)11，而正確的答案為 7，亦即選項(3)時，考生要在答案卡第 1 列 3 畫記（注意不是 7），如：

解 答 欄												
1	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 2	<input checked="" type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> -	<input type="checkbox"/> ±

例：若第 5 題為多選題，正確選項為(1)與(3)時，考生要在答案卡的第 5 列的 1 與 3 畫記，如：

5	<input checked="" type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 2	<input checked="" type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> -	<input type="checkbox"/> ±
---	---------------------------------------	----------------------------	---------------------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------	----------------------------

- (二) 選填題的題號是 A, B, C, ..., 而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。

例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 與第 21 列的 7 畫記，如：

20	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 6	<input type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 0	<input checked="" type="checkbox"/> -	<input type="checkbox"/> ±
21	<input type="checkbox"/> 1	<input type="checkbox"/> 2	<input type="checkbox"/> 3	<input type="checkbox"/> 4	<input type="checkbox"/> 5	<input type="checkbox"/> 6	<input checked="" type="checkbox"/> 7	<input type="checkbox"/> 8	<input type="checkbox"/> 9	<input type="checkbox"/> 0	<input type="checkbox"/> -	<input type="checkbox"/> ±

祝考試順利

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

一、單選題（24 分）

說明：第 1 題至第 4 題，每題 5 個選項，其中只有 1 個是最適當的選項，畫記在答案卡之「解答欄」。各題答對得 6 分，未作答、答錯、或畫記多於 1 個選項者，該題以零分計算。

1. 考慮坐標平面上滿足 $2^x = 5^y$ 的點 $P(x, y)$ ，試問下列哪一個選項是錯誤的？

- (1) $(0, 0)$ 是一個可能的 P 點
- (2) $(\log 5, \log 2)$ 是一個可能的 P 點
- (3) 點 $P(x, y)$ 滿足 $xy \geq 0$
- (4) 所有可能的點 $P(x, y)$ 構成的圖形為一直線
- (5) 點 P 的 x, y 坐標可以同時為正整數

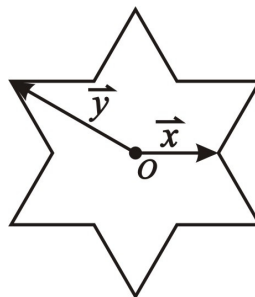
2. 將 1、2、3、4 四個數字隨機填入右下方 2×2 的方格中，每個方格中恰填一數字，但數字可重複使用。試問事件「 A 方格的數字大於 B 方格的數字、且 C 方格的數字大於 D 方格的數字」的機率為多少？

- (1) $\frac{1}{16}$
- (2) $\frac{9}{64}$
- (3) $\frac{25}{64}$
- (4) $\frac{9}{256}$
- (5) $\frac{25}{256}$

A	B
C	D

3. 將一圓的六個等分點分成兩組相間的三點，它們所構成的兩個正三角形扣除內部六條線段後可以形成一正六角星，如圖所示的正六角星是以原點 O 為中心，其中 \vec{x}, \vec{y} 分別為原點 O 到兩個頂點的向量。若將原點 O 到正六角星 12 個頂點的向量，都寫成為 $a\vec{x} + b\vec{y}$ 的形式，則 $a+b$ 的最大值為何？

- (1) 2
(2) 3
(3) 4
(4) 5
(5) 6



4. 設 f 為實係數三次多項式函數。已知五個方程式的相異實根個數如下表所述：

方 程 式	相異實根的個數
$f(x) - 20 = 0$	1
$f(x) - 10 = 0$	3
$f(x) = 0$	3
$f(x) + 10 = 0$	1
$f(x) + 20 = 0$	1

關於 f 的極小值 α ，試問下列哪一個選項是正確的？

- (1) α 不存在
(2) $-20 < \alpha < -10$
(3) $-10 < \alpha < 0$
(4) $0 < \alpha < 10$
(5) $10 < \alpha < 20$

註：極小值是指相對極小值，或稱為局部極小值。

二、多選題（24 分）

說明：第 5 題至第 7 題，每題有 4 個選項，其中至少有 1 個是正確的選項。選出正確選項，畫記在答案卡之「解答欄」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分，答錯 1 個選項者，得 4 分，所有選項均未作答或答錯多於 1 個選項者，該題以零分計算。

5. 設 $A = \begin{bmatrix} 4 & a \\ 9 & b \end{bmatrix}$ 、 $B = \begin{bmatrix} 6 & 7 \\ c & d \end{bmatrix}$ 。已知 $AB = \begin{bmatrix} 3 & 10 \\ -2 & 15 \end{bmatrix}$ 且 A 的行列式之值為 2，試問下列

哪些選項是正確的？

(1) $9a - 4b = -2$

(2) $ac = -24$

(3) $d = -15$

(4) $\begin{bmatrix} b & -a \\ -9 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4 & a \\ 9 & b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

6. 假設兩地之間的通話費，第一個半分鐘是 5 元，之後每半分鐘是 2 元，不滿半分鐘以半分鐘計算，則 t 分鐘的通話費 $C(t)$ 公式如下（單位元）：

$$C(t) = 5 - 2[1 - 2t],$$

其中 $[x]$ 表示小於或等於 x 的最大整數，例如： $[3.5] = 3$, $[-3.1] = -4$, $[-5] = -5$ 等。

試問下列哪些選項是正確的？

(1) 10 分鐘的通話費是 43 元

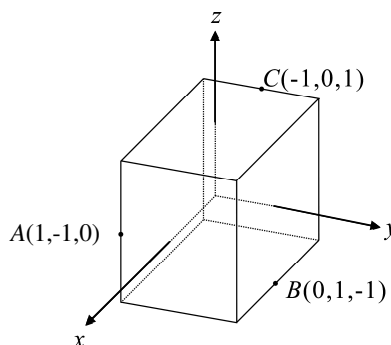
(2) 在 $t \geq 0$ 時， $[1 - 2t] = -[2t - 1]$ 恆成立

(3) $\lim_{t \rightarrow 10.5} C(t) = 45$

(4) $\lim_{t \rightarrow 11.2} C(t) = 49$

7. 在坐標空間中，有一邊長為 2、中心在原點 O 的正立方體，且各稜邊都與三坐標平面平行或垂直，如圖所示。已知 $A(1,-1,0)$ 、 $B(0,1,-1)$ 、 $C(-1,0,1)$ 這三點都是某平面 E 和正立方體稜邊的交點。試問下列哪些點也是平面 E 和正立方體稜邊的交點？

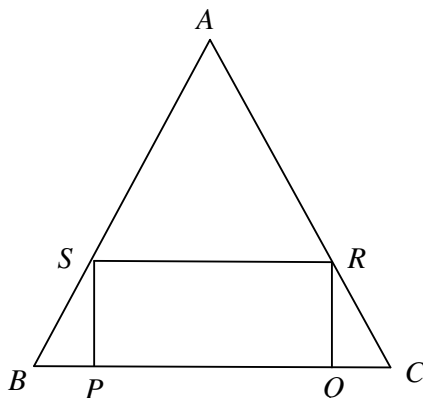
- (1) $\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -1\right)$
 (2) $(-1, 1, 0)$
 (3) $(0, -1, -1)$
 (4) $(-2, 1, 1)$



三、選填題（28 分）

說明：第 A 題至第 D 題為選填題，將答案畫記在答案卡之「解答欄」所標示的列號（8 - 15）內。每一題完全答對得 7 分，答錯不倒扣；未完全答對不給分。

- A. 如圖所示， $PQRS$ 為一給定的矩形，長 $\overline{PQ}=12$ 、寬 $\overline{QR}=5$ ，而 $\triangle ABC$ 為等腰三角形，其中 $\overline{AB}=\overline{AC}$ ， P 、 Q 在 \overline{BC} 邊上， R 、 S 分別在 \overline{CA} 、 \overline{AB} 邊上，則當 $\triangle ABC$ 中 \overline{BC} 邊上的高為 ⑧⑨ 時， $\triangle ABC$ 的面積為最小。



- B. 某手機公司共有甲、乙、丙三個生產線，依據統計，甲、乙、丙所製造的手機中分別有 5%, 3%, 3% 是瑕疵品。若公司希望在全部的瑕疵品中，由甲生產線所製造的比例不得超過 $\frac{5}{12}$ ，則甲生產線所製造的手機數量可占全部手機產量的百分比至多為 ⑩⑪ %。

- C. 坐標平面上，已知函數 $f(x) = 4x^3 + x - 2$ 的圖形以 $A(1, 3)$ 為切點的切線為 L ，則以切線 L 及曲線 $y = f(x)$ 為界所圍成區域的面積為 ⑫⑬。

D. 坐標空間中，若平面 $E: ax + by + cz = 1$ 滿足以下三條件：

(1) 平面 E 與平面 $F: x + y + z = 1$ 有一夾角為 30° ，

(2) 點 $A(1, 1, 1)$ 到平面 E 的距離等於 3，

(3) $a + b + c > 0$ ，

則 $a + b + c$ 的值為 $\frac{\textcircled{14}}{\textcircled{15}}$ 。(化成最簡分數)

— — — — — 以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷 — — — — —

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本大題共有二題計算證明題，答案務必寫在答案卷上，並於題號欄標明題號(一、二)與子題號((1)、(2))，同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每題配分標於題末。

一. 已知實係數三次多項式函數 $y = f(x)$ 的最高次項係數為 12，其圖形與水平線 $y = 25$ 交於相異的三點 $(0, 25)$, $(1, 25)$ 及 $(2, 25)$ 。

(1) 試求曲線 $y = f(x)$ 圖形上的反曲點坐標。(6 分)

(2) 試求定積分 $\int_0^2 f(x) dx$ 之值。(6 分)

二.(1) 試求所有滿足 $\log(x^3 - 12x^2 + 41x - 20) \geq 1$ 的 x 值之範圍。(6 分)

(2) 試證：當 $\frac{3\pi}{2} \leq \theta \leq 2\pi$ 時， $3^{\cos\theta} \geq 3^{1+\sin\theta}$ 。(6 分)