數學甲非選擇題考生作答情形分析

朱惠文

每年指考成績單寄發後，有些考生認為我的數學甲考科非選擇題，答案明明正確，為什麼無法得到該題的滿分，甚至 1 分未得？本文就此一疑問，說明本年度數學甲非選擇題僅得到部份題分或是 1 分未得的可能情形，以及數學科非選擇題給分的大原則，希望能藉此廓清部分考生的疑惑。各題參考解答請見附件。

試題

一. 設 R 代表坐標平面上由下列兩個不等式所定義的區域，

$$\begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ y \ge 1 \end{cases}$$

求函數 $x+y$ 在區域 R 上的最大值與最小值。（13 分）

考生作答情形分析

本題主要評量不等式的應用。試題內設 R 代表兩個不等式 $\begin{cases} x^2+y^2 \le 4 \\ y \ge 1 \end{cases}$ 所定義的區域，求函數 $x+y$ 在區域 R 上的最大值與最小值。解題大致可分為三個步驟，首先由試題所給不等式求出 x 的範圍為 $-\sqrt{3} \le x \le \sqrt{3}$； y 的範圍為 $1 \le y \le 2$。接下來則在此限制條件下，求函數 $x+y$ 的最大、最小值。求解最大、最小值的方法有很多種，例如柯西不等式、算術平均大於等於幾何平均、圓的參數式等均可求得最大值；而線性規畫結合圓的切線則可求得最大與最小值。不管採用哪種解法，均需列出正確的數學式及推理的過程，才能得到分數。就解最小值而言，可根據第一步所求得的範圍，推得點 $\left(-\sqrt{3},1\right)$ 在區域 R 上，故最小值為 $1-\sqrt{3}$。再以柯西不等式求解最大值為例，考生需寫出 $(x+y)^2 \le (x^2+y^2)(1^2+1^2)$ ，得 $-2\sqrt{2} \le x+y \le 2\sqrt{2}$ ，並說明點 $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ 在區域 R ，故函數 $x+y$ 的最大值為 $2\sqrt{2}$ 。本題亦可採用線性規畫作答，第一步為畫出正確的圖形（請詳見附件），第二步是利用畫圖或文字正確說明當 $x=-\sqrt{3}$ 、 $y=1$ 時，函數 $x+y$ 有最小值 $-\sqrt{3}+1$；當直線 $x+y=c$ 與圓相切時，函數 $x+y$ 有最大值；最後則寫出圓的切線方程式及其過程，才能得到分數，若只寫切線方程式，而無過程，則無法拿到分數。例如圓心到切線的距離等於半徑，得 $2=\dfrac{|0+0-c|}{\sqrt{1^2+1^2}}$；或圓與切線的交點只有一個，故 $x^2+(c-x)^2=4$ 的判別式等於 0；或找出法線 $x=y$ ，得切點為 $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ 等。另外，本題亦可利用微積分方法求解，不過此方法所涉及的數學技巧與知識超出高中課程範圍，但考生只要作答過程正確，仍可得分。總而言之，不管利用哪種方法求解，需正確且完整說明求解最大值與最小值的理由與答案，才能拿到滿分（詳細解法請見附件）。

有些考生會利用柯西不等式或算術平均大於等於幾何平均的方法解題，雖能寫出正確的最大、最小值，但未說明為何當 $(x,y)=\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ ，函數有最大值；當 $(x,y)=\left(-\sqrt{3},1\right)$ ，函數有最小

值。有些則未考量區域 R 的範圍，直接認定當 $(x,y)=(\sqrt{2},\sqrt{2})$，函數有最大值 $2\sqrt{2}$；當 $(x,y)=(-\sqrt{2},-\sqrt{2})$，函數有最小值 $-2\sqrt{2}$。採用設圓的參數式解題者，有些會正確設圓上一點為 $x=2\cos t$、$y=2\sin t$，由題意可得出 t 的範圍為 $\frac{\pi}{6}\le t\le\frac{5\pi}{6}$，因為 $x+y=2\cos t+2\sin t=2\sqrt{2}\sin(t+\frac{\pi}{4})$，故 $\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{4}\le t+\frac{\pi}{4}\le\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{4}$，而誤以為當 $t+\frac{\pi}{4}=\frac{5\pi}{6}+\frac{\pi}{4}$ 時，函數 $x+y$ 有最大值。採用線性規畫方法的考生，有些誤以為區域 R 為一正方形；或將目標函數 $x+y$ 畫成 $x-y$，有些雖能畫出正確的圖形，亦寫出正確的切線方程式為 $x+y=2\sqrt{2}$，但並未說明為何當直線與圓相切時，函數 $x+y$ 有最大值，以上這些情形，考生均認為已寫出正確的最大與最小值，但事實上並沒有說明為何函數 $x+y$ 的最大值為 $2\sqrt{2}$、最小值為 $-\sqrt{3}+1$ 的理由，或答案錯誤，故只能得到部份分數，甚或沒有分數。

試題

二.設四次多項式 $f(x)=x(1-x)(1+x^2)$

(1) 選取積分區間 $a\le x\le b$，使得定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 達到最大值，並求此最大值；（7 分）

(2) 設 $c>0$，求證 $\int_{-c}^{c} f(x)dx$ 恆為負值。（6 分）

考生作答情形分析

本題評量多項式的積分。題幹為一個四次多項式，第 1 小題求當 a、b 的值為多少時，定積分 $\int_a^b f(x)dx$ 有最大值。解題分為兩個步驟，第一步需畫 $f(x)$ 的圖形或列式說明因為 $1+x^2\ge 0$，所以當 $0\le x\le 1$ 時，$f(x)\ge 0$，其它範圍均小於或等於 0，因此定積分 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x(1-x)(1+x^2)dx$ 有最大值。第二步則求此定積分的值，即 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1\left(x+x^3-x^2-x^4\right)dx=\left.\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5\right|_0^1=\frac{13}{60}$。

有些考生能求得正確定積分的值，但只列出當 $0\le x\le 1$ 時，$f(x)\ge 0$，並未說明其它範圍均小於或等於 0，這樣的過程並不能確定區間 $0\le x\le 1$，$\int_0^1 x(1-x)(1+x^2)dx$ 有最大值。有些嘗試用圖形說明當 $0\le x\le 1$ 時，$f(x)\ge 0$，但圖形畫錯，例如畫 $f(x)=1+x^2$ 的圖，這些考生誤以為已說明 $\int_0^1 f(x)dx=\int_0^1 x(1-x)(1+x^2)dx$ 有最大值，但理由錯誤或不夠完整。有些則列出正確的定積分式為 $\int_0^1\left(x+x^3-x^2-x^4\right)dx=\left.\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5\right|_0^1$，但計算錯誤。這些考生均只能拿到部份分數。

第 2 小題則證明當 $c>0$ 時，$\int_{-c}^{c} f(x)dx$ 恆為負值。過程分為兩部份，第一部份可利用奇函數微分值為零的性質，即 $\int_{-c}^{c}(x+x^3)dx=0$，推得 $\int_{-c}^{c}\left(x+x^3-x^2-x^4\right)dx=-\int_{-c}^{c}\left(x^2+x^4\right)dx$

或 $\int_{-c}^{c}\left(x+x^3-x^2-x^4\right)dx=\left.\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5\right|_{-c}^{c}=-\frac{2}{3}c^3-\frac{2}{5}c^5$

因為 $c>0$，所以 $\int_{-c}^{c} f(x)dx=-\int_{-c}^{c}\left(x^2+x^4\right)dx<0$ 或 $\int_{-c}^{c} f(x)dx=-\frac{2}{3}c^3-\frac{2}{5}c^5<0$。本題為一證

明題，證明過程中的理由敘述完整、推理過程正確、邏輯判斷合理，才能得到滿分（詳細解法請見附件）。若理由敘述不夠完整，表達不夠完善，則只能拿到部份分數，例如有些考生直接寫出 $\int_{-c}^{c} f(x)dx = -\frac{2}{3}c^3 - \frac{2}{5}c^5 < 0$，但並未說明因為 $c > 0$，所以 $\int_{-c}^{c} f(x)dx = -\frac{2}{3}c^3 - \frac{2}{5}c^5 < 0$。或是求解積分的過程錯誤，例如求得 $\int_{-c}^{c} f(x)dx = -\frac{1}{3}c^3 - \frac{1}{5}c^5$。若答案正確，但推理過程不合理，則無法拿到分數，例如有些考生根據第 1 小題推得除 $0 \le x \le 1$ 以外的積分值均小於零的錯誤結論，或誤解 $\int_{-c}^{c} f(x)dx = \frac{2}{3}c^3 + \frac{2}{5}c^5 < 0$。

數學考科的題型有選擇、選填與非選擇題。選擇題與選填題，只要答案正確，即可得到全部分數。但非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數[1]。另外，指考數學甲非選擇題考生作答情形分析，主要用意在於提供老師教學或學生平常練習時的參考，並非僅說明評分標準，必須輔以考生的成績與可能犯的錯誤加以說明（請參考 2008 年 11 月 15 日選才 171 期）。

※附件

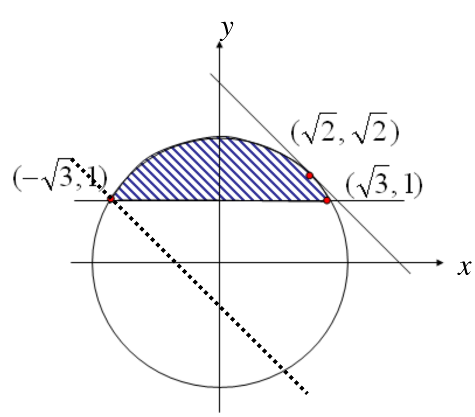
數學科試題的解法不只一種，故以下提供多數考生可能採用的解法，未列的解法，只要推論或解題過程正確，仍可得分。

參考解法（試題內容請見前文）

第一題

解法一

1. 區域 R 如右圖所示。$x^2 + y^2 = 4$ 與 $y = 1$ 的交點為 $(\pm\sqrt{3}, 1)$
   因為函數 $x + y$ 的斜率為 -1，
   若以函數 $x + y$ 的直線掃動時（如右圖），可發現當 $x = -\sqrt{3}$、$y = 1$ 時，函數 $x + y$ 有最小值 $-\sqrt{3} + 1$；當直線 $x + y = c$ 與圓相切時，函數 $x + y$ 有最大值。



2. 以下提供兩個求圓的切線的解法

   解法一

   設 $x + y = c$ 與 $x^2 + y^2 = 4$ 相切，將 $y = c - x$ 代入 $x^2 + y^2 = 4$ 得
   $x^2 + (c - x)^2 = 4 \Leftrightarrow 2x^2 - 2cx + c^2 - 4 = 0$
   由 $\Delta = 4c^2 - 8(c^2 - 4) = 0$ 得 $c = \pm 2\sqrt{2}$
   得切點為 $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$

[1] 吳家怡(民 93)，我的數學甲非選擇題得分了嗎。選才通訊，第 120 期。

解法二

設 $x+y=c$ 與 $x^2+y^2=4$ 相切，則圓心到切點距離為半徑 2

$$2=\frac{|0+0-c|}{\sqrt{1^2+1^2}}$$

$\Rightarrow c=\pm 2\sqrt{2}$ (負不合)

故函數 $x+y$ 的最大值為 $2\sqrt{2}$

解法二

1. 由不等式 $\begin{cases} x^2+y^2\le 4 \\ y\ge 1 \end{cases}$ 得 $\begin{cases} -\sqrt{3}\le x\le\sqrt{3} \\ 1\le y\le 2 \end{cases}$

   所以 $x+y\ge 1-\sqrt{3}$，最小值為 $1-\sqrt{3}$

   因為點($\sqrt{3}$,2)不在不等式區域內，故最大值不是 $2+\sqrt{3}$
2. 利用柯西不等式 $(x+y)^2\le(x^2+y^2)(1^2+1^2)$

   （或利用算術平均大於等於幾何平均得 $(x+y)^2=x^2+y^2+2xy\le 2(x^2+y^2)$ ）

   $\Rightarrow -2\sqrt{2}\le x+y\le 2\sqrt{2}$

   $x+y=2\sqrt{2}$ 成立 $\Leftrightarrow$ $x=y=\sqrt{2}$

   $x+y=-2\sqrt{2}$ 成立 $\Leftrightarrow$ $x=y=-\sqrt{2}$

   因為點 $\left(\sqrt{2},\sqrt{2}\right)$ 在區域 R，所以最大值為 $2\sqrt{2}$ 。

解法三

1. 設 $x=2\cos t$， $y=2\sin t$

   因為 $y\ge 1\Rightarrow 2\sin t\ge 1\Rightarrow \sin t\ge\frac{1}{2}\Rightarrow -\frac{\sqrt{3}}{2}\le\cos t\le\frac{\sqrt{3}}{2}$

   $x+y$ 的最小值為 $2(-\frac{\sqrt{3}}{2}+\frac{1}{2})=1-\sqrt{3}$
2. $x+y=2\cos t+2\sin t=2\sqrt{2}\sin(t+\frac{\pi}{4})$

   當 $t=\frac{\pi}{4}$ 時， $x+y$ 有最大值，且 $x+y$ 的最大值為 $2\sqrt{2}$

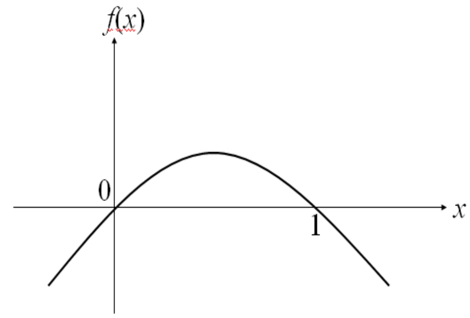
第二題

第(1)題：

1. $f(x)=x(1-x)(1+x^2)$

$\because 1+x^2$ 恆大於 0

故當 $0<x<1$ ，$f(x)$ 恆為正，其它範圍為小於或等於 0



2. 最大值為 $\int_0^1 x(1-x)(1+x^2)dx=\int_0^1 (x+x^3-x^2-x^4)dx$

$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5\Big|_0^1$$

$$=\frac{13}{60}$$

第(2)題：

解法一

利用奇函數積分值為 0 的性質得

$$\int_{-c}^{c} f(x)dx=\int_{-c}^{c}(x+x^3-x^2-x^4)dx=-\int_{-c}^{c}(x^2+x^4)dx$$

因為 $c>0$ ，且 $x^2+x^4\geq 0$

所以 $\int_{-c}^{c} f(x)dx<0$

解法二

$$\int_{-c}^{c} f(x)dx=\int_{-c}^{c}(x+x^3-x^2-x^4)dx$$

$$=\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{3}x^3+\frac{1}{4}x^4-\frac{1}{5}x^5\ \Big|_{-c}^{c}$$

$$=\frac{1}{2}c^2-\frac{1}{3}c^3+\frac{1}{4}c^4-\frac{1}{5}c^5-(\frac{1}{2}c^2+\frac{1}{3}c^3+\frac{1}{4}c^4+\frac{1}{5}c^5)$$

$$=-\frac{2}{3}c^3-\frac{2}{5}c^5$$

因為 $c>0$

所以 $\int_{-c}^{c} f(x)dx=-\frac{2}{3}c^3-\frac{2}{5}c^5<0$