96 指考數學甲、數學乙
非選擇題作答情形分析

編者案：96 指考非選擇題評分標準說明系列報導，以數學考科壓軸，為此系列報導畫下句點。本期邀請本中心數學考科兩位學科研究員撰文，提供數學甲、數學乙的非選擇題評分標準說明及考生作答情形分析，請關心高中教育的各界參考。

第一處 朱惠文 陳慧美

96 年指定科目考試數學甲與數學乙的考試題型可分爲：選擇題、選塡題與計算證明題。其中計算證明題主要是評量考生能否陳述解題時的論證過程，以及數學表達能力。因此，爲瞭解學生於非選擇題上的推理過程，我們抽樣了數學甲 800 份、數學乙 876 份的非選擇題答案卷，來瞭解考生的解題概念與想法，並配合 96 年數學甲、數學乙全體考生在非選擇題的得分情形來分析。下面將分別對 96 年數學甲與數學乙非選擇題部分，來說明學生解題時可能出現的作答類型。

數學甲

表一爲 91 至 96 年數學甲非選擇題得零分的考生人數與人數百分比。除 92 年因爲 SARS 取消非選擇題以外，今年非選擇題零分人數較 94、95 年多，但比 91、93 年少，表示部分學生對今年試題不知如何下筆作答。以下嘗試從試題主觀的數學內容，及考生客觀的答題反應，找出爲何今年零分人數較多的原因，其中有關考生的作答情形，是從參與 96 年數學甲考生群中，隨機抽樣 800 份試卷進行分析。

表一、91 至 96 年數學甲非選擇題零分統計表

年度	人數	人數百分比
91	11585	22%
92	無	
93	19211	33%
94	3910	7%
95	2582	5%
96	**7901**	**17%**

【第一題題目】

設 $f(x)=x^3-6x^2-x+30$，且 a,b 是方程式 $f(x)=0$ 的兩正根。

(1) (3 分) 求解三次方程式 $f(x)=0$ 。

(2) (8 分) 若 ΔABC 中，$\overline{AC}=a,\ \overline{BC}=b,\ \angle ACB=120^{\circ}$，且 D, E 是 $\overline{AB}$ 上兩點，滿足 $\overline{BD}=\overline{BC},\ \overline{AE}=\overline{AC}$，試求 ΔCDE 的面積。

【說明】

本題爲一題組，題幹先說明 a,b 是方程式 $f(x)=0$ 的兩正根，第 1 小題爲解三次方程式 $f(x)=0$ 的根，第 2 小題則將第 1 小題所算出的根代入第 2 小題。

第 1 小題可利用牛頓一次因式檢驗法，例如寫出可能的有理根爲 ±1、±2、±3、±5、±6、±10、±15、±30。得出其中一根後，再利用長除法或綜合除法得出其他的根；或是將 $f(x)$ 進行因式分解，例如直接寫出 $(x+2)(x^2-8x+15)$，這兩個解法均爲高一所學的基本知識及應用。表二爲 800 份考生抽樣卷作答結果，約 49%考生採用因式分解方法，即寫出 $(x+2)(x^2-8x+15)$ 的方式作答，但有極少數考生是利用根與係數的關係求解，如列出 $a+b+c=6$，這群考生可能誤以爲此題與大考中心於 96 年 5 月上網的研究用試卷類似，所以才以根與係數觀念解答。從表二可看出約 60%的考生能完全作對。分析考生的作答情形，發現採用因式分解的考生，約 13%作答錯誤，其中有些考生未能分解完成，例如只寫出 $f(x)=(x-3)(x^2-3x-10)$ 或因式分解錯誤，例如 $f(x)=(x-2)(x-3)(x+5)$，另外，有些只寫出 $f(x)=(x+2)(x-3)(x-5)$，但未寫出 $x=-2,3,5$，或是只寫兩正根 $3,5$，這些考生不是不會，而是未能完整表達整個解題過程。而採牛頓一次因式檢驗法的考生中，有些只寫出 $f(3)=0$，或是 $f(-2)=0$、$f(3)=0$、$f(5)=0$，與只作答 $f(x)=(x+2)(x-3)(x-5)$ 犯了同樣的錯誤，即未明確寫出試題所要的答案。但清楚而且完整表達解題過程，是指考測驗目標，也是高中修習數學課程，應逐步培養的能力之一。

表二、第一大題之第(1)小題考生的作答情形統計表

第(1)小題作答情形	人數	百分比
未答	159	20%
不知如何下筆作答或是亂答	94	12%
利用有理根或牛頓一次因式檢驗法，例如 $f(5)=0$	173	22%
利用因式分解或餘式定理	393	49%
完全正確	480	60%

第 2 小題是利用第 1 小題算出的兩正根$3,5$，代入得$\overline{AC}=3$、$\overline{BC}=5$，或$\overline{AC}=5$、$\overline{BC}=3$，再求ΔCDE的面積，此題的解法可分爲三步驟：

(1) 求ΔCAB的面積

(2) 利用餘弦定理求$\overline{AB}$

(3) 求出$\overline{DE}$

第 1 步驟求ΔCAB的面積，最直接的方法就是正弦定理，當然也可利用海龍公式。表三爲分析 800 份考生作答結果，約 22%知道求ΔCAB的面積，其中約 83%的考生利用正弦定理作答。至於第 2 步驟利用餘弦定理得$\overline{AB}$，由表三可知約 39%的考生知道利用餘弦定理算出$\overline{AB}$的長度，其中約 9 成可以完全作對。正弦、餘弦定理是高中三角函數課程必學的基本數學知識，觀察抽樣卷考生的作答情形，結果發現約 16%的考生會用餘弦定理，但不會用正弦定理或是公式記錯，約 3%的考生會用正弦定理，但不會用餘弦定理或公式記錯，顯示考生較熟悉餘弦定理甚於正弦定理，可能因爲餘弦定理容易流於程序性知識，正弦定理則著重於觀念的應用。對照歷年試題，評量餘弦定理試題的答對（得分）率多數高於正弦定理。至於第 3 步驟則利用試題所給條件$\overline{AE}=\overline{AC}$，$\overline{BD}=\overline{BC}$，與由餘弦定理算出的$\overline{AB}$，推得$\overline{DE}=1$，再加上$\Delta CDE$與$\Delta CAB$異底同高，得$\dfrac{\Delta CDE}{\Delta CAB}=\dfrac{\overline{DE}}{\overline{AB}}=\dfrac{1}{7}$。由表三得知約 14%的考生能正確算出$\overline{DE}=1$，並推得$\Delta CDE=\dfrac{1}{7}\Delta CAB$，約 12%的考生雖能得出$\overline{DE}=1$，卻無法推得$\Delta CDE$與$\Delta CAB$的關係。能完全作對的考生約 19%。事實上，本題的解法有很多種，以下列出除上述作法以外，考生抽樣卷所採用的作法：

(1) 利用餘弦定理算出$\cos A$、$\cos B$，再算出$\sin A$、$\sin B$後，利用$\Delta CDE=\Delta BCD+\Delta ACE-\Delta ABC$

(2) 利用餘弦定理算出$\cos A$後求出$\overline{CE}$，$\cos B$求出$\overline{CD}$，再求出$\cos\angle CED$，再算$\Delta CDE=\dfrac{1}{2}\overline{CE}\times\overline{DE}\times\sin\angle CED$

這兩個作法均用到二次以上的餘弦定理，計算量不少，一不小心，很容易計算錯誤。

表三、第一大題之第(2)小題考生的作答情形統計表

第(2)小題作答情形	人數	百分比
未答	160	20%
不知如何下筆作答，或是隨意亂答	89	11%
知道求 ΔCAB 的面積	221	28%
(1)利用正弦定理，且計算正確	183	23%
(2)利用海龍公式，或其他方法，且計算正確	10	1%
(3) $\sin 120^\circ$ 算錯或是面積公式算錯，例如例如少 $\frac{1}{2}$ 或是海龍公式背錯，與其他錯誤	26	4%
知道利用餘弦定理算得 $\overline{AB}$ 的長度	311	39%
(1)利用餘弦定理，且計算正確	284	36%
(2)餘弦定理公式背錯或是 $\cos 120^\circ$ 算錯，與其他錯誤	26	3%
能正確算出 $\overline{DE}=1$，並推出 $\Delta CDE=\frac{1}{7}\Delta CAB$	111	14%
能正確算出 $\overline{DE}=1$，但無法推出 $\Delta CDE=\frac{1}{7}\Delta CAB$	94	12%
計算 ΔCDE 的面積	183	23%
利用 ΔCAB 的面積	125	16%
算出 ΔCAB 的高	47	6%
完全正確	152	19%

另外，此題的試題設計類似 TRML(Taiwan Regions Mathematics League 台灣區高中數學競賽)或 ARML(American Regions Mathematics League 美國高中數學聯盟)接力賽的命題方式，一題分成二個不相關的小題，將第 1 小題的答案寫成已知條件，再傳給第 2 小題。由考生抽樣卷，亦發現有些考生不是不會寫，而是沒注意試題的第一句話「 a,b 是方程式 $f(x)=0$ 的兩正根」，而求得 $\overline{AB}=\sqrt{a^2+ab+b^2}$ ，$\Delta ABC=\frac{\sqrt{3}}{4}ab$。答案討論會議時，與會的大學教授與高中老師認爲第 2 小題主要評量考生是否能依題意畫出相關圖形，並找出相關解題策略，例如正弦、餘弦定理等解決問題，與第 1 小題是否會解方程式的根並不相同。試題的接力賽設計方式導致考生即使第 2 小題的觀念正確，但仍因第 1 小題錯誤而沒有拿到分數。非選擇題以題組方式命製的用意爲提示某個關鍵的解題步驟，鼓勵考生盡量作答非選擇題，但此題並非如此，抽樣卷結果亦呈現放棄第 1 小題與第 2 小題的人數差不多，約 20%。

圖一列出此題的成績分佈圖，以得 0、3、6、9 與 11 分的考生居多，依據今年非選擇題試題研發計劃的研究，將各分數所對應的考生能力群如下：

得 0 分者：不知如何下手作答

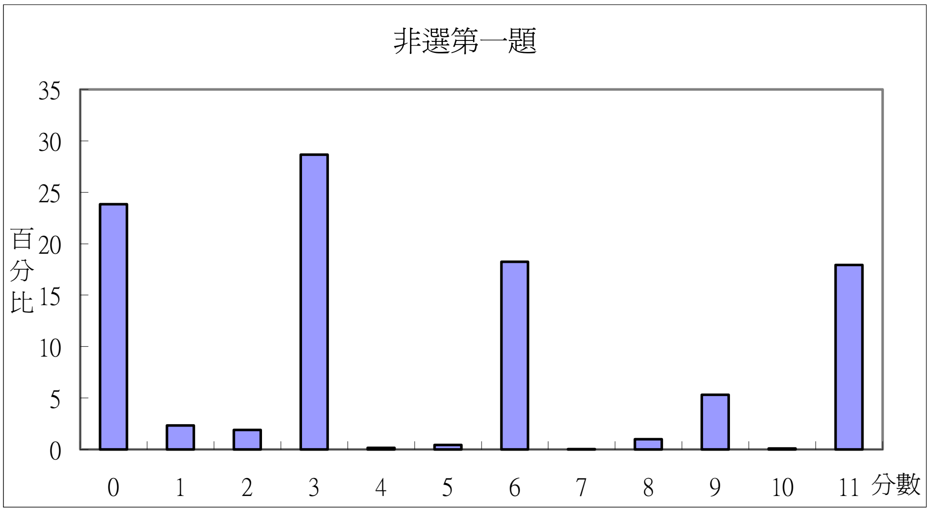
得 3 分者：可以正確解方程式的根、或正確利用正弦定理、或正確利用餘弦定理解題

得 6 分者：可以正確解方程式的根、利用正弦定理、利用餘弦定理中的兩項

得 9 分者：可以正確解方程式的根、利用正弦定理、利用餘弦定理

得 11 分者：能夠確實且完整作答整個解題過程

由以上敘述可知此題對於鑑別考生各群能力方面，相當不錯。得零分的考生約 25%，3 分考生約 30%，約 19%能完全作對。



圖一　第一題的考生成績分佈圖

【第二題題目】

設 ΔABC 的三頂點坐標分別為 $A(-2,7,15)$、$B(1,16,3)$、$C(10,7,3)$。

(1) (5 分) 試求通過 A、B、C 三點的平面方程式。

(2) (5 分) 試求 ΔABC 的外心坐標。

【說明】

第二題評量空間三角形的外心坐標。有關外心為三角形三邊中垂線交點的定義屬於國中課程的範疇，坊間參考書籍或前幾年試題常出現評量平面一三角形的外心坐標，很少看見求空間中一三角形的外心坐標。考生若仿平面上解外心坐標的方法，如外心到三頂點等距離，可能會忽略外心坐標必須在該三角形所在平面的性質，命題者可能想要提示這個關鍵的解題概念，因此第 1 小題是求通過 A、B、C 三點的平面方程式，第 2 小題才是求 ΔABC 的外心坐標。

第 1 小題有以下幾個方法求出平面方程式：

(1) 設平面法向量為 $\overrightarrow{N}=(l,m,n)$，利用平面上的直線向量與法向量垂直的性質，寫出 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{N}=0$ 與 $\overrightarrow{AC}\cdot\overrightarrow{N}=0$，解聯立方程式得 $\overrightarrow{N}=(1,1,1)$，或是利用外積得 $\overrightarrow{N}=(\begin{vmatrix}3&-4\\0&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-4&1\\-1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&3\\1&0\end{vmatrix})$。

(2) 設平面方程式為 $ax+by+cz=d$，將 A、B、C 三點代入解聯立方程組。

(3) 設通過 A、B、C 三點的平面方程式為 $\begin{vmatrix}x-(-2)&y-7&z-15\\1-(-2)&16-7&3-15\\10-(-2)&7-7&3-15\end{vmatrix}=0$

(4) 觀察 A、B、C 三點的坐標分量和即是 20，所以通過 A、B、C 三點的平面方程式為 $x+y+z=20$

分析 800 份考生抽樣卷（見表四）發現，約 57%是直接寫出法向量為 $(\begin{vmatrix}3&-4\\0&-1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-4&1\\-1&1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1&3\\1&0\end{vmatrix})$，這群考生中，約 20%作答錯誤，其原因歸類如下：

(1) 不會向量的基本運算或是粗心算錯，例如將 $\overrightarrow{AB}=(3,9,12)$ 寫成 $\overrightarrow{AB}=(3,-9,-12)$。

(2) 求外積時計算算錯，例如算成 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}=(3,5,3)$。

(3) 能正確算出 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AC}$，但將其中一點代入求平面方程式時，卻計算錯誤或誤認平面必過原點，例如寫出 $x+y+z=0$ 或 $x+y+z=14$。

少數考生會假設方程式為 $ax+by+cz+d=0$，但不會解 a、b、c、d 或代入 A、B、C 三點時，計算錯誤。以上這些考生並不是不曉得如何解題，而是知道該從哪個方向及用哪些概念或技巧解題，但因不熟悉各概念的基本定義，而作答錯誤，真是可惜。由表四亦得知約 24%考生放棄作答，約 50%能完全作對。

表四、第二大題之第(1)小題考生的作答情形統計表

第(1)小題作答情形	人數	百分比
未答	191	24%
不知如何下筆作答或亂答	98	12%
(法一)利用法向量，即寫出 $\overline{AB}\cdot\overline{N}=0$ 及 $\overline{AC}\cdot\overline{N}=0$	12	2%
利用法向量，但法向量算錯	3	25%
(法二)利用外積，即寫出法向量為($\begin{vmatrix}3 & -4\\0 & -1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}-4 & 1\\-1 & 1\end{vmatrix},\begin{vmatrix}1 & 3\\1 & 0\end{vmatrix}$)	453	57%
利用外積，但答案算錯	98	12%
(法三)將 A、B、C 三點代入，得聯立方程組	28	4%
將 A、B、C 三點代入，但答案算錯	12	2%
(法四)直接用行列式，即 $\begin{vmatrix}x+2 & y-7 & z-15\\3 & 9 & -12\\12 & 0 & -12\end{vmatrix}=0$	26	3%
直接用行列式，但答案算錯	7	1%
利用其他做法	9	1%
完全正確	396	50%

第 2 小題求外心坐標的方法有以下 2 種：

(1) 直接用外心到三頂點等距離，寫出 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$ 的數學式。

(2) 利用外心在三角形三邊中垂線所構成平面的交線上，推得 $\overline{AB}$ 的中垂線爲 $3x+4y-4z=0$，$\overline{AC}$ 的中垂線爲 $x-z=-5$，或是寫出 $\overrightarrow{AZ}\cdot\overrightarrow{AB}=\frac{1}{2}\left|\overrightarrow{AB}\right|^2$

分析 800 份抽樣卷結果，約 70%放棄作答或不知如何下手作答。能下筆作答者，多半是利用外心到三頂點等距離的觀念，有些考生會列出 $\overline{OA}=\overline{OB}=\overline{OC}$，但化簡時計算錯誤。事實上，不管是採取哪一個作法，最後還需加上 $x+y+z=20$ 才能解出答案。觀察抽樣卷考生的作答狀況，發現知道如何下筆作答的考生中，約 42%沒有考慮外心在過三點所構成的平面的條件，而列出了 3 個不正確的數學式，當然亦解錯了外心坐標。雖然命題者嘗試在第 1 小題引導考生往這個方向思考，但由考生的反應，可看出並沒有發揮功用。

表五、第二大題之第(2)小題考生的作答情形統計表

第(2)小題作答情形	人數	百分比
未答	186	23%
不知如何下筆作答或亂答	361	45%
(法一)利用外心到 3 點距離相等	132	17%
利用外心到 3 點距離相等，但答案算錯	40	5%
(法二)利用中垂面的做法，或是線之中點到外心的向量與直線垂直	45	6%
利用中垂面的做法，但答案算錯	22	3%
(法三)利用投影，得 $\overline{AZ}\cdot\overline{AB}=\frac{1}{2}\left\|\overline{AB}\right\|^2$	17	2%
利用投影，但計算錯誤	10	1%
算成重心坐標、內心坐標或垂心	65	8%
缺 $x+y+z=20$	105	13%
完全正確	44	6%

本題將考生所熟悉的平面幾何概念推廣到三度空間，評量考生是否能將平面上所用的解題概念推廣到三度空間，由考生的作答反應可發現空間圖形的思考及空間平面與直線間的關係仍是高中課程難度較高的部分。

圖二列出此題的成績分佈圖，以得 0、5、7 與 10 分的考生居多，依據今年非選擇題試題研發計劃的研究，將各分數所對應的考生能力群如下：

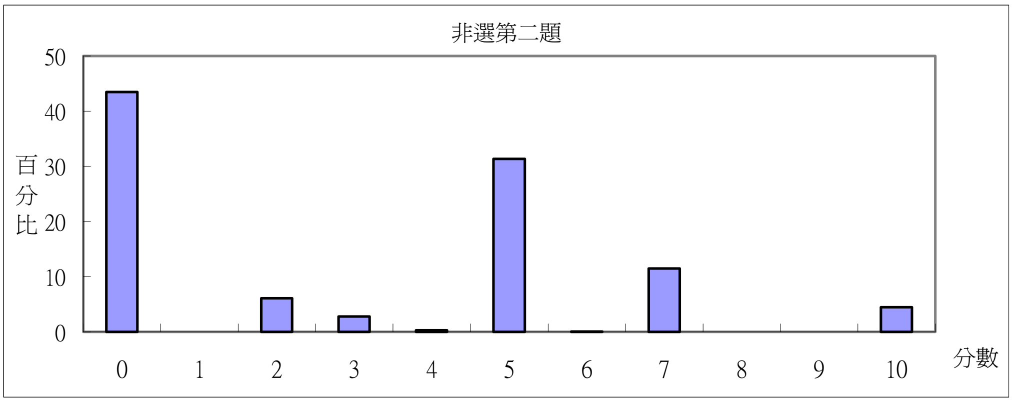
得 0 分者：不知如何下手作答

得 5 分者：可以求出正確的平面方程式

得 7 分者：可以求出正確的平面方程式，並能用正確數學式表達外心坐標的定義

得 10 分者：能夠確實且完整作答整個解題過程

由以上敘述可知此題對於鑑別考生各群能力方面，相當不錯。得零分的考生約 40%，5 分考生約 30%，僅約 6%能完全作對。



圖二　第二題的考生成績分佈圖

由以上分析可知，今年非選擇題零分較往年人數多的原因在於第一題雖為題組，但評量兩個不同概念，對考生而言是兩個不同的問題，難度較高，第二題則是空間觀念的試題，由歷年研究顯示空間單元的難度較高，再加上考生多數不知如何下筆作答以及第 1 小題的提示並未發生功效，使得放棄作答的比例較前兩年多。不過，由考生作答結果亦發現，部分考生知道需用哪些基本概念或技巧解題，但卻不熟悉或不熟練其概念的定義，而導致作答錯誤，實在可惜，建議學生在修習數學時，應確定了解課程中所牽涉的數學各詞的定義及技巧，並於平時多做練習，避免考試時因觀念不清楚而失分。不過今年數甲試題雖然零分較前兩年多，但滿分亦較前兩年多，故對於鑑別考生程度上相當不錯，間接達到協助大學選才的功用。

數學乙

表六列出 91 至 96 年數學乙非選擇題得零分的考生人數及人數百分比（92 年表示”無”，是因為 SARS 取消非選擇題），由表六可看出 96 年的零分人數為 31953 人，百分比為 37%，可明顯看出零分人數百分比為 91 年至 96 年中最高，可能原因為今年非選擇題所評量的概念，如：直線的投影仍為直線，與有理數的推論等概念，皆是考生較不熟悉所致。

表六、91 至 96 年數學乙非選擇題零分人數統計表

年度	人數	人數百分比
91	6255	7%
92	無	
93	13348	14%
94	31808	33%
95	9798	10%
96	**31953**	**37%**

表七、91 至 96 年數學乙非選擇題滿分人數統計表

年度	人數	人數百分比
91	931	1%
92	無	
93	9081	9.24%
94	773	0.8%
95	9709	10%
96	**2203**	**3%**

另外，由表七可知，今年數學乙中非選擇題得滿分人數爲 2203 人，人數百分比 3%，與 95 年相比亦減少許多。以下將針對 96 年數學乙非選擇題做分析：

【第一題題目】

某別墅有一個由四塊正方形的玻璃拼成的田字形窗戶，窗外路燈的光線(假設路燈是一個點光源)透過窗戶在地板上形成一個變形的田字形光影。在地板上建置一個直角坐標系，發現田字形光影外框的四個頂點的坐標分別爲 $(-4,40)$ ，$(16,0)$ ，$(16,40)$ 和 $(28,16)$ 。求田字形窗戶的中心投影在地板上的坐標。(13分)

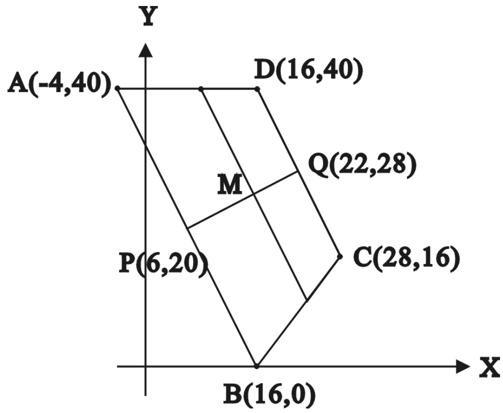
【說明】

數學乙非選擇題第一題是評量考生能否運用直線的投影仍爲直線之性質，來求得田字形窗戶的中心投影在地板上的坐標 M （如圖三），考生對於此題的解法有下列三種：

(1) 利用四邊形之兩條對角線（ $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ ）求交點；

(2) 利用等腰梯形性質，求某一對角線（ $\overline{AC}$ 或 $\overline{BD}$ ）與兩底中點連線 $\overline{PQ}$ 求交點；

(3) 利用內分比求交點坐標（如：求出 $\overline{AM}:\overline{MC}$ 之比後，再利用分點公式求交點坐標）。



圖三

表八是從 96 年數學乙考生群中，抽樣 876 名考生的答案卷進行分析，表中可看出有二成多的考生連下筆作答都不願意就直接放棄；另有一成五的考生則寫一些與答案無關的內容。但有 24.7% 的考生能完全作對，其中大多數的考生（約 23%）是利用此四邊形之兩對角線（ $\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ ）來求交點。

表八、第一大題非選擇題的作答類型

作答類型	人數	百分比
未答	203	23.2
有寫一些跟答案無關的內容，可看出不知該如何作答	131	15
(法一)利用兩對角線求解	243	27.7
利用兩對角線求交點，但方程式不正確。	24	2.7
利用兩對角線求交點，方程式正確，但交點計算錯誤。	12	1.4
完全正確，利用兩對角線求交點。	**207**	**23.6**
(法二)利用等腰梯形性質，求某對角線與兩底中點連線之交點	3	0.3
完全正確，利用等腰梯形性質，求某一對角線與兩底之中點連線之交點。	**2**	**0.2**
(法三)利用分點公式來求交點座標	16	1.8
完全正確，利用內分比來求交點坐標。	**8**	**0.9**
求出兩組對邊中點連線後，求二中線交點	97	11.1
求出某對邊之兩中點後，再求二中點之中心點	94	10.7
計算四點之重心，即 $(x,y)=(\frac{x_1+x_2+x_3+x_4}{4},\frac{y_1+y_2+y_3+y_4}{4})$	33	3.8
算出某對角坐標之中心點	32	3.6
其他	20	2.3

關於解法一的部分，知道要利用四邊形二條對角線求交點的考生比例約為 28%，但只有 23.6%能完全作對。有 2.7%考生求二條對角線方程式時，不慎將方程式寫錯；另有 1.4%考生可得此二條對角線的方程式，卻在解方程式時不小心計算錯誤，以致無法得到正確的交點坐標。

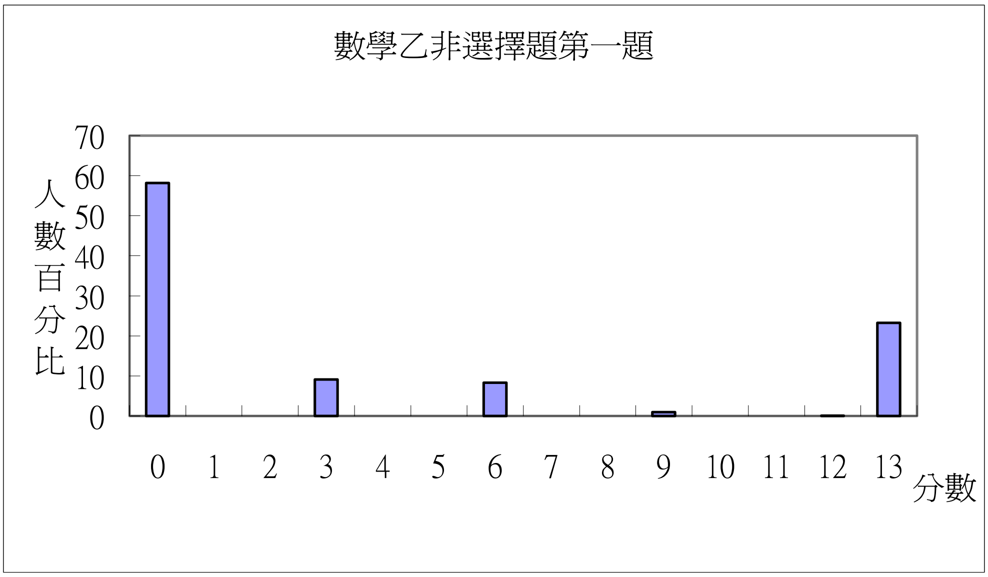
關於解法二的部分，知道利用等腰梯形性質來求解，且以兩底中點連線 $\overline{PQ}$，與某一對角線求交點坐標的比例為 0.3%，可見較少考生使用此解法。

關於解法三的部分，知道利用內分比求交點的考生比例為 1.8%，但能完全作答正確的考生有 0.9%。其中作答時較常發生的問題是比例計算錯誤；或比例算對，但在利用內分比時計算錯誤或公式寫錯。

由於此題是求田字形窗戶的中心投影於地板上的坐標，因此有近三成的考生會誤以為四個邊的中心點投影後，仍為投影後圖形的四個邊之中心點，完全忽略了原田字型窗戶的四邊中點，會因窗戶與光源的相對位置之不同，使得投影後不一定仍為四邊中心

點。因此，11.1%的考生會利用圖形的兩組對邊中點連線求交點；或有 3.8%的考生則直接將此四點坐標中的 x 坐標相加後除以 4，y 坐標相加後亦除以 4，來求出投影在地板上的坐標；亦有 10.7%的考生會先求得某組對邊之兩中點後，再求這兩中點的中心點。但這些方法皆因概念不甚正確，故無法正確求得田字形窗戶的中心投影在地板上的坐標。

至於在其他作法中，有考生會假設中心點到四頂點等距離來求解，或在坐標平面中作圖後，再以尺量得長度求坐標…等方法，亦無法得到正確答案。



圖四　數學乙非選擇題第一題成績分佈圖

圖四爲數學乙全體考生於非選擇題第一題的得分情形，其中得零分的考生約 58%，可知此群的考生屬於不知該如何作答，或寫一些跟答案無關的內容。約 10%考生各得 3 分或 6 分。另有約 1%的考生得 9 分，可知這群考生可能是在解方程式時計算錯誤。此題得 13 分的人數百分比爲 25%，即約四分之一的考生可得滿分。

【第二題題目】

設 r,s 爲整數，已知整係數多項式 x^3+rx+s 的因式分解是 $x^3+rx+s=(x+a)^2(x+b)$，其中 a,b 爲相異實數，求證 a,b 都是有理數。（13 分）

【說明】

第二題是評量考生能否將 $x^3+rx+s=(x+a)^2(x+b)$ 展開，經比較係數後得三個聯立方程式；或由題目中看出 $-a,-a,-b$ 爲 x^3+rx+s 之根，再利用根與係數的關係得聯立方程式。之後再將 a 、 b 整理成以 r 、 s 形式，進而推證 a 、 b 都是有理數。

表九、第二大題非選擇題的作答類型

作答類型	人數	百分比
未答	326	37.2
有寫一些跟答案無關的內容，可看出不知該如何作答。	70	8
利用展開比較係數(或根與係數的關係)，但在展開 $(x+a)^2(x+b)$ 發生錯誤。	43	4.9
利用根與係數的關係，但在寫入根與係數之方程式時符號寫錯，故無法得到二個以上的方程組。	15	1.7
只做到將方程式展開，但卻未比較係數	10	1.1
將___、___數值代入方程式中，但無法得到二個以上的方程組，其中某數值為 $-a,-b$ -，1，-2 或 2…等。	12	1.4
得到二個以上的方程組後，看不出在整理什麼，或就直接下結論	160	18.8
得到二個以上的方程組後，可看出想將方程組整理成 $\begin{cases} a=\dfrac{3s}{2r} \ (\text{或} 2ar=3s) \\ b=\dfrac{-3s}{r} \ (\text{或} br=-3s) \end{cases}$，但卻因計算錯誤，使得無法得到 $a=\dfrac{3s}{2r}$ $(\text{或} b=\dfrac{-3s}{r})$	15	1.7
得到二個以上的方程組後，可看出想將方程組整理成 $\begin{cases} -3a^2=r \\ -2a^3=s \end{cases}$ $(\text{或} \begin{cases} \dfrac{-3}{4}b^2=r \\ \dfrac{1}{4}b^3=s \end{cases})$ 等型式，但卻只能整理出 $-3a^2=r$ 或 $-2a^3=s$	31	3.5
可得 $a=\dfrac{3s}{2r}$ $(\text{或} b=\dfrac{-3s}{r})$，故 a 為有理數，但卻未說明同理 b 為有理數	1	0.1
可得 $\begin{cases} -3a^2=r \\ -2a^3=s \end{cases}$ $(\text{或} \begin{cases} \dfrac{-3}{4}b^2=r \\ \dfrac{1}{4}b^3=s \end{cases})$，但未說明由 a^3 與 a^2 都是有理數，得 a 為有理數；或未將兩式相除得 a 為有理數，同理 b 為有理數	66	7.5
直設假設 a、b 為無理數，或某數如：$a=\sqrt{2},b=1$；$a=2,b=-4$ 來證明	18	2
其他	16	1.8
完全正確	**95**	**10.8**

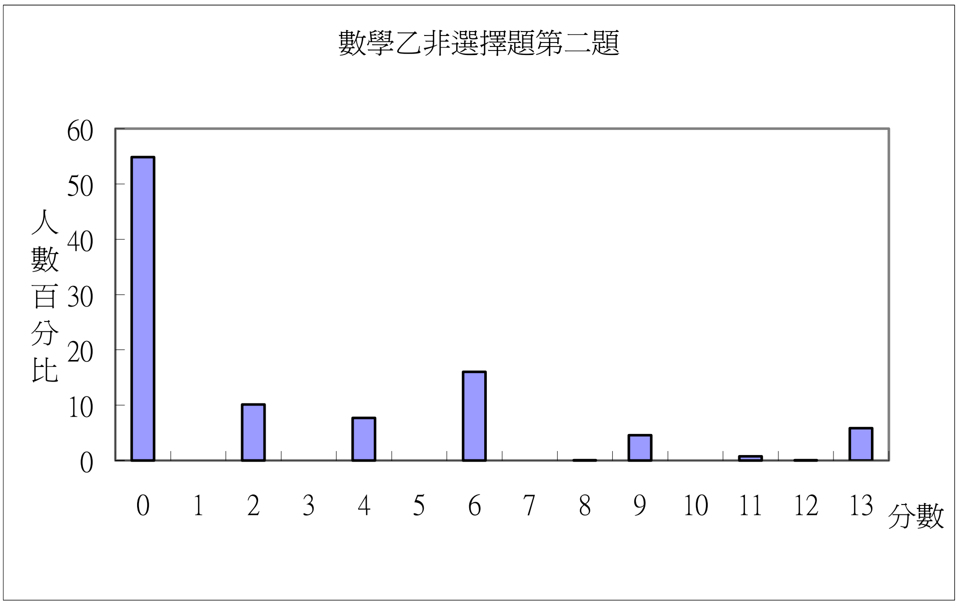
抽樣 876 名數學乙考生的答案卷進行分析（見表九），有三成七的考生未作答，可見這群考生在面對證明題時是直接放棄不願作答，或對文字符號的運算演練有恐懼感，亦或者對有理數、實數的觀念不清楚，而無法著手解題。另有 8%考生寫一些與答案無關的內容，可看出不知該如何下筆。

在整理得聯立方程式的部分，有 6.6%考生知道要將方程式展開後，再利用比較係數或根與係數得方程組，但在開展方程式的整理過程中發生錯誤；另有 1.1%考生只想到將方程式展開，卻沒想到可利用比較係數得聯立方程式；有考生則是將 $-a$ ，$-b$ 帶入方程式中，但在計算過程中發生正負號寫錯的問題，因而無法得到二個以上的方程組。

在方程組的整理部分，有 18.8%的考生會利用比較係數法，或根與係數得到二個以上的方程組後，卻不知道應該將 a 、b 整理成 r 、s 的形式，可能是因為方程組中有四個未知符號，使得考生找不到任何頭緒來整理式子。另有 5.2%考生會試著將方程式作整理，卻無法完整整理成 $\begin{cases} a=\dfrac{3s}{2r} \\ b=\dfrac{-3s}{r} \end{cases}$ ，或 $\begin{cases} -3a^2=r \\ -2a^3=s \end{cases}$ 的型式，大都只能整理出某一項，以致無法做後續的推論。

在推論的部分，有考生已寫出 $a=\dfrac{3s}{2r}$ ，也推論出 a 為有理數，但卻未說明同理 b 為有理數，使得說明上未盡完善，而失去部分分數。亦有約 7.5%考生已推論至 $\begin{cases} -3a^2=r \\ -2a^3=s \end{cases}$ ，但未說明 a^3 與 a^2 都是有理數，直接下結論得 a 為有理數；或未想到可將兩式相除得 a 為有理數，同理 b 為有理數，可知考生對有理數的定義不甚清楚，導致無法完整推論出 a 、b 皆為有理數。另有 2%考生會想要利用反証法來推論 a 、b 為有理數，會先假設 a 、b 為無理數，但後續的證明卻不知該如何推論到錯誤的假設。

從表九的作答類型分析可知，約一成的考生能正確推論出 a 、b 皆為有理數。



圖五 數學乙非選擇題第二題成績分佈圖

圖五爲數學乙全體考生於非選擇題第二題的得分情形，得零分的考生人數百分比約54%，與第一題得零分的考生人數相比還較少些，可能是因爲考生只要願意將式子展開整理，再以根與係數或比較係數法來得方程組，皆能得到部分分數。由圖五可知，約有10%的考生得 2 分；8%的考生得 4 分；約 15%的考生得 6 分，但得 9 分及 13 分的人數則不到一成，可見多數考生只能做到將方程式展開比較係數，或運用根與係數得聯立方程式。但接下來因無法想到可將 a 、b 整理成以 r 、s 型式，使得後續的推論無法順利完成。

數學乙兩題計算證明題，第一題評量考生直線的投影能爲直線的觀念，第二題則評量有理數的推論，這兩題的計算量並不大，只要對直線投影及有理數的概念清楚，應可下筆作答。但由於這兩題並無任何小題引導，對部份考生而言，實難有頭緒下筆作答；又這二題的零分人數百分比，皆在五成以上，爲鼓勵這群考生不要放棄作答非選擇題，可考慮以引導式的小題來設計試題，以幫助考生能下筆作答。

大考中心每年均會針對數學甲、數學乙的非選擇題進行抽樣，並對所抽樣的試卷進行作答類型分析，是爲了想瞭解學生在解題過程中所使用的概念與想法，進而從中發現學生可能的迷思概念與錯誤類型，以提供給現場高中教師教學上的參考。此外，高中老師若對此分析，有其教學實務上的補充或意見，亦歡迎老師與我們分享。