

95 指定科目考試

數學甲及數學乙之非選擇題作答情形

編者案：承續前三期，介紹 95 指定科目考試各科非選擇題的評分原則與其說明，本期選才電子報刊登數學甲及數學乙非選擇題的考生作答情形。為瞭解考生在解題過程中所使用的概念與想法，每年大考中心均會針對數學甲及數學乙的非選擇題進行抽樣，並對所抽樣之答案卷進行作答情形分析，從中探究學生可能的迷思概念與錯誤類型，以提供給高中教師參考。

■第一處 朱惠文、陳慧美

95年指定科目考試數學甲與數學乙的考試題型可分為：選擇題、選填題與計算證明題。其中計算證明題主要是評量考生能否解題時的論證過程，以及數學表達能力。因此，為瞭解學生於非選擇題上的推理過程，我們抽樣了數學甲1423份、數學乙1433份的非選擇題作答卷，來瞭解考生的解題概念與想法，並配合95年數學甲、數學乙全體考生在非選擇題的得分情形來分析。下面將分別對95年數學甲與數學乙非選擇題部分，來說明學生可能出現的錯誤觀念。

數學甲

表一列出91至95年數學甲非選擇題得零分的考生人數及人數百分比。由表一可看出，95年的零分人數為2582人，百分比為5%，與94年的零分人數相差不多，可能是因為各題內均放了兩題引導題。另外，再由表二可知，今年非選擇題滿分人數是最少的，與91年相差不大。但91年有一題是證明題，評量考生推理論證的能力，與今年不大相同。以下將就95年數學甲非選擇題抽樣考生(1423份)的作答情形，與全體考生非選擇題的得分情形來分析。

表一 91至95年數學甲非選擇題零分人數統計表

年度	人數	百分比
95	2582	5%
94	3910	7%
93	19211	33%
92	無	
91	11585	22%

表二 91至95年數學甲非選擇題滿分人數統計表

年度	人數	百分比
95	68	0.12%
94	1196	2.06%
93	4597	7.78%
92	無	
91	345	0.67%

第一題題目：

- (1) (3分) 將 48510 分解成質因數的乘積。
- (2) (7分) 寫出在 1 和 250 之間且與 48510 互質的所有合數(合數就是比 1 大而不是質數的整數)。

本題分為兩小題，從測驗目標的角度來看，第一小題評量考生是否了解何謂質因數，以及將一正整數進行質因數分解；第二小題則評量考生是否能讀懂試題內有關「合數」的定義，並能連結有關質因數的概念解題。以此觀點來看，第一小題的用意是希望協助考生作答第二小題時，能從質因數的想法開始進行，而不是用列舉刪除的方法解題。表三隨機抽樣1423份考生第一小題的作答情形。將近六成的考生可以正確寫出48510的質因數乘積，可能是因為本題為課本或是坊間參考書籍常見的練習題，而且是高一上學期修習的

課程。不過約1%的考生雖然得出正解，但將試題中質因數乘積誤解成將質因數相乘，而得2310，以及約2%的考生可利用短除法寫出正確的因數分解過程，但是卻無法將其轉換成質因數乘積，這群考生均是知道如何進行質因數分解，但是卻因誤解題意或沒有轉換成正確的數學式，而沒有得到分數，實屬可惜。

表三 第一大題之第(1)小題考生的作答情形統計表

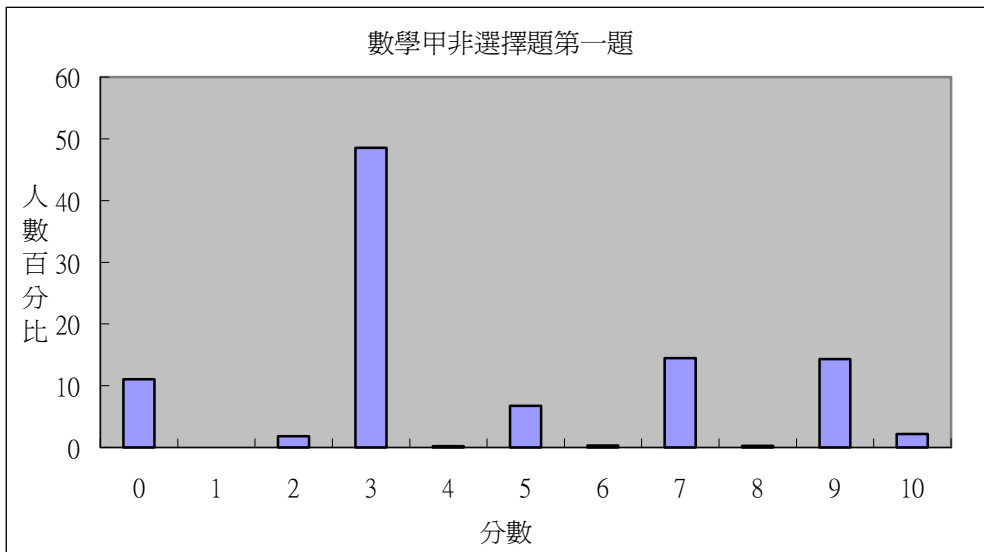
第(1)小題作答情形	人數	百分比
未答	14	1.0
隨便亂寫，毫無道理，或未列過程直接寫答案，且答案錯誤。	6	0.4
未列過程，直接寫答案。	296	20.8
質因數分解不徹底，答案中仍有合數。	43	3.0
過程正確(例如利用短除法)，但答案表示錯誤(未列或列錯或多餘加註)。	35	2.5
分解錯誤(如寫成 $2^2 \times 3 \times 5^3 \times 11$ 或 $2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2 \times 13$ 或 $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11$)	61	4.3
其他錯誤。	24	1.7
誤解「將一數分解為質因數乘積」的意義，將答案寫為 $2 \times 3 \times 5 \times 7 \times 11 = 2310$ ，或正確表示之後再加寫此式，或其他。	22	1.5
完全正確。	845	59.4

至於第二小題，考生如果若能將試題內有關「合數」指的是比1大而不是質數的整數的說明，解讀成「合數」可分解成質因數的乘積，再加上需與48510互質，可得答案可能是 13^2 、 13×17 、 13×19 、 $17^2 \dots$ 等等。因為試題要求介於1和250之間，得答案只有 13^2 、 13×17 、 13×19 。表四抽樣生本小題的作答情形。約 $\frac{1}{4}$ 的考生放棄作答，約 $\frac{1}{5}$ 的考生不知如何下手，只有一成的考生知道可以從質因數下手解題，但是這些考生中，約一半的考生少考慮了範圍的界定，或是質因數少算了13或17，使得真正做對的考生只有4%。多半的考生能寫出 13^2 、 13×17 、 13×19 中的兩個，但是漏寫了一個，或是多寫了 11×13 ；當然也有考生直接在試卷上寫出1至250的數字，再將與48510不互質與質數逐個刪除，不過採用這個解法的考生，因為需排除的數字個數相當多，幾乎沒有人完全做對。

表四 第一大題之第(2)小題考生的作答情形統計表

第(2)小題作答情形	人數	百分比
未答	359	25.2
隨便亂寫，毫無道理，或未列過程直接寫答案，且答案錯誤。	266	18.7
未列過程，或說明理由牽強，但答案部分正確或完全正確。	424	29.8
利用列舉法(刪除法)，但列舉錯誤。	132	9.3
利用互質的觀念，說出所求合數的質因數特質，但漏列或多列答案。	73	5.1
利用互質的觀念，說出所求合數的質因數特質，也寫出三個正確答案。但乘積錯誤，如 13^2 寫成 199。	1	0.1
其他錯誤。	2	0.1
完全正確。	61	4.3

圖一為全體考生本題的得分情形。近五成的考生可以得到三分，而得七分與九分的考生均約15%。僅約3%的考生本題可以得到滿分。從表三與表四的分析可以看出，至少約二成的考生並沒有列出解題的過程或是寫出理由，而直接寫出答案，例如第一小題，直接寫 $2 \times 3^2 \times 5 \times 7^2 \times 11$ ；第二小題直接寫 13^2 、 13×17 、 13×19 。這樣直接寫答案，沒有寫出過程的方式，並不符合計算證明題的要求。試卷內有關計算證明題的作答說明詳述「同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分。」而且非選擇題主要評量考生是否能用數學語言表達解題過程的能力，並從考生解題的過程中，評量其所使用的概念與推論是否正確，因此非選擇題解題的過程與理由，是其評分的重要依據。



圖一 數學甲非選擇題第一題成績分佈圖

第二題題目：

傳說中孫悟空的「如意金箍棒」是由「定海神針」變形得來的。這定海神針在變形時永遠保持為圓柱體，其底圓半徑原為 12 公分且以每秒 1 公分的等速率縮短，而長度以每秒 20 公分的等速率增長。已知神針之底圓半徑只能從 12 公分縮到 4 公分為止，且知在這段變形過程中，當底圓半徑為 10 公分時其體積最大。

- (1) (2 分) 試問神針在變形開始幾秒時其體積最大？
- (2) (6 分) 試求定海神針原來的長度。
- (3) (5 分) 假設孫悟空將神針體積最小時定形成金箍棒，試求金箍棒的長度。

本題主要評量考生多項式圖形的最大、最小值的相關概念，且以「孫悟空」的「如意金箍棒」為情境來加以包裝，整題字數為 207 個字。因此考生解題時，須先讀懂題意，找出所需要的數學元素，並利用所學過相關數學知識解題。拆開本題的包裝，可發現此題與坊間常見的微分試題類似，不同點在於試題內提供最大值所在的位置，請考生算出原長應該是多少。第一至第三小題的試題設計與上題類似，是採引導的方式逐步協助考生解題。第一小題直接問神針什麼時候體積最大，考生只要讀懂試題內有關「底圓半徑原為 12 公分且以每秒 1 公分的等速率縮短」以及「已知神針之底圓半徑只能從 12 公分縮到 4 公分為止」，寫出正確的底圓半徑與時間的關係式，即可得出 2 秒時，體積 V 最大。表五為抽樣生的作答情形。考生不是完全做對，就是不知如何下手作答。完全放棄的考生約一成，約七成的考生能完全作對。

表五 第二大題之第(1)小題考生的作答情形統計表

第(1)小題作答情形	人數	百分比
未答	192	13.6
隨便亂寫，毫無道理，或未列過程直接寫答案，且答案錯誤。	112	7.9
直接寫答案，無說明。	263	18.5
答案正確，但式子過於簡略，如： $12-10=2$ 。	119	8.4
完全正確。	626	44

第二小題則是求定海神針原來的長度。解題時，可利用微分、亦可利用算術平均大於等於幾何平均（以下簡稱算幾不等式）的方法。表六列出抽樣生此題的作答情形。與上題的結果相反，約七成的考生不知如何下手求解。本題的正確寫法應先說明底圓半徑從12公分縮到4公分，可得時間 t 的範圍介於0至8秒，因此當 $t=2$ 時有最大值，所以 $V'(2)=0$ ，然後再利用微分或是算幾不等式作答。從表六可看出多半會作答的考生，僅能寫出體積 V 的關係式，接下來不知如何往下進行。有些考生能寫出正確的體積公式，亦會利用微分法求極大值，而且知道利用 $V'(2)=0$ ，但是並未說明當 $t=2$ 時有極大值，所以 $V'(2)=0$ 。從表中，亦可看出能完全作對的考生不到4%。

表六 第二大題之第(2)小題考生的作答情形統計表

第(2)小題作答情形	人數	百分比
未答	618	43.4
隨便亂寫，毫無道理，或未列過程直接寫答案，且答案錯誤。	403	28.3
未列過程，或隨便亂寫不知所云，但答案正確。	21	1.5
體積之表示，列式錯誤。	34	2.4
體積之表示，列式正確。但未進一步處理，或後續處理錯誤。	77	5.4
體積之表示，列式正確。以微分法處理時，微分錯誤。	27	1.9
體積之表示，列式正確。以微分法處理時，微分正確，但最終處理錯誤，如 $V'(2)$ 代入錯誤，或解 $V'(2)=0$ 錯誤。	26	1.8
體積之表示，列式正確。以微分法處理時，微分正確，且由解 $V'(2)=0$ 得出答案，但未說明當 $t=2$ 時有極大值，微分為0，故 $V'(2)=0$ 。	53	3.7
體積之表示，列式正確。以算幾不等式處理時，不等式列式錯誤。	10	0.7
其他錯誤。	3	0.2
完全正確1。以微分方式求得，也提到當 $t=2$ 時有極大值，故 $V'(2)=0$ 。	45	3.2
完全正確2。以算幾不等式方式求得。	2	0.1

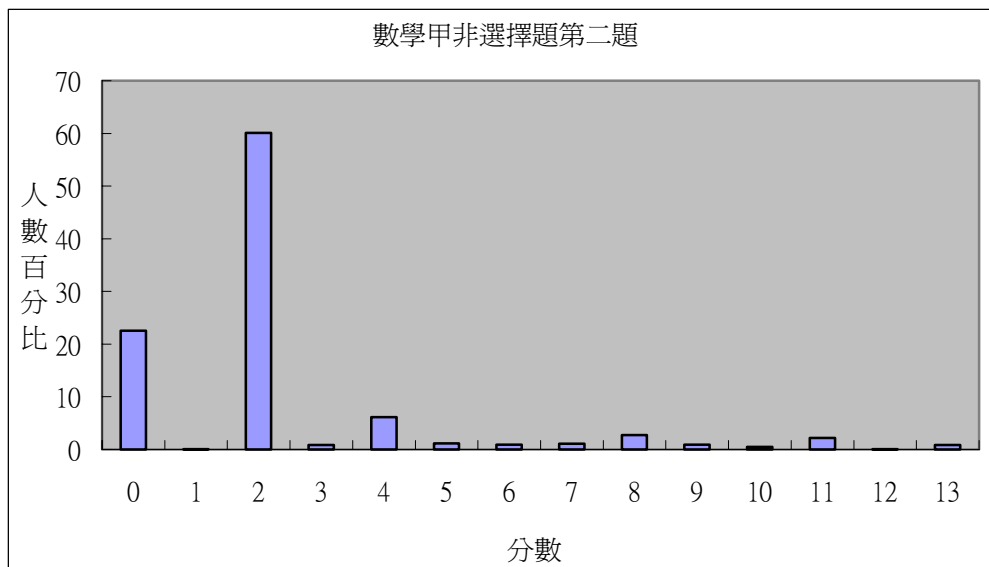
前兩小題都圍繞體積的極大值的想法解題。第三小題則是請問體積最小時，金箍棒的長度。本題的解法需先說明最小值發生在端點的位置，這可利用圖形或是微分等方法，再比較兩端點的體積值，最後才求出正確答案為當 $t=2$ 時，體積最小，此時的長度為220公分。表七是抽樣生的作答情形。約六成的考生連寫都不願意寫，直接放棄；約一成的考生是直接猜答。能完全作對的考生不到1%。而約1%的考生直接解 $V'(t)=0$ ，得 $t=2,12$ ，認為 $t=12$ 時體積最小。這些考生不是不會，而是忽略了需先考慮 t 的範圍。事實上，第二小題求解時，就必須先考量 t 的範圍，不過多半考生作答時，直接認為極值就是發生在一次導數等於零，而忽略了有範圍限制的多項式函數，其最大、最小值

可以發生在一次導數為零，也可以在端點的地方。另外，也有些考生最後比較 $V(0)$ 與 $V(8)$ 的值時，卻計算錯誤，實屬可惜。

表七 第二大題之第(3)小題考生的作答情形統計表

第(3)小題作答情形	人數	百分比
未答	919	64.6
隨便亂寫，毫無道理，或未列過程直接寫答案，且答案錯誤。	210	14.8
未列過程，或隨便亂寫不知所云，但答案正確。	17	1.2
沒有任何說明，或不當說明，就直接代值求 $L(0)$ 、 $L(6)$ 、 $L(8)$ 等，答案錯誤。	51	3.6
沒有任何說明，就直接算 $L(8)$ ，且答案正確。	6	0.4
有部分說明，但不完整(如未比較 $V(0)$ 與 $V(8)$ 之值)，算出 $L(8)$ 得正確答案。	31	2.2
未注意 $0 \leq t \leq 8$ 之範圍，直接由微分等於 0 解出 $t = 12$ 代入，得出錯誤最小值。	13	0.9
比較 $V(0)$ 與 $V(8)$ 之值，未說理由，但得出正確答案。	6	0.4
比較 $V(0)$ 與 $V(8)$ 之值，有說明理由(如極值與端點，或遞增與遞減等)，但因計算錯誤得出錯誤答案。	26	1.8
其他錯誤。	27	1.9
完全正確。	12	0.8

圖二列出全體考生的得分情形。約六成的考生可以得到兩分，這些考生可能可以作答第一小題，但是第二小題以後就不知如何下手。至於其他分數的考生，幾乎均在5%以下。顯示此題雖然嘗試以引導的方式協助考生作答，但是對考生解第二小題與第三小題的幫助不大，但也可能是考生對微分求最大值並不熟悉，由第二與第三小題放棄作答的考生至少有四成的情形來看，也可略見端倪。



圖二 數學甲非選擇題第二題成績分佈圖

今年兩題計算證明題，第一題評量考生能否作基本的數字運算，以及因數概念。第二題則是評量考生多項式函數的極大極小值。這兩題解題所需要的概念與技巧對高中生而言，應不陌生。但是第二題考生所反應的得分與作答結果，顯示考生對函數的概念似乎是越來越薄弱，而且也不願意下筆作答。另外，非選擇題主要評量考生是否能清楚表達解題時的推理過程，給分關鍵在於每一步的推理過程是否合理。而且試卷上也明白說明「必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分」。但是從以上考生的作答結果，發現近兩成的考生沒有任何演算過程或理由，直接寫答案，這些考生可能不曉得應該如何描述自己的解題過程，但是用文字或是數學語言表達的能力仍是高中數學教學中很重要的一環，而且也是高中生所需具備的能力之一。

數學乙

表八列出91至95年數學乙非選擇題得零分的考生人數及人數百分比。由表八可看出，95年的零分人數為9798人，百分比為10%，較94年的零分人數減少許多，可能原因是非選擇題中出了一題試求 $\sqrt{1521}$ 的值，是屬國中課程所學之知識，因此考生多半能作答。另外，再由表九可知，今年非選擇題滿分人數是最多的，滿分人數百分比與93年較為相近。以下將就95年數學乙非選擇題抽樣考生(1433份)的作答情形，與全體考生非選擇題的得分情形來分析。

表八 91至95年數學乙非選擇題零分人數統計表

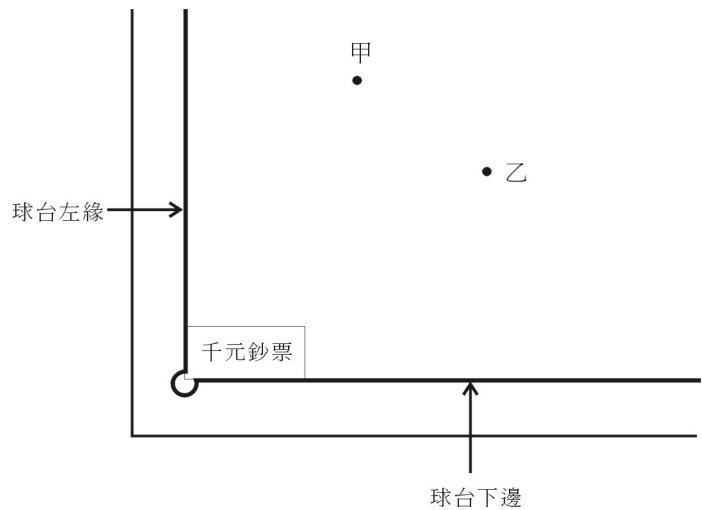
年度	人數	百分比
95	9798	10%
94	31808	33%
93	13348	14%
92	無	
91	6255	7%

表九 91至95年數學乙非選擇題滿分人數統計表

年度	人數	百分比
95	9709	10%
94	773	0.8%
93	9081	9.24%
92	無	
91	931	1%

第一題題目：

珈慶杯撞球大賽的勝負是這樣決定的：裁判將寬16公分、長7公分的千元鈔票貼邊放置在長方形球台的左下角，如右圖所示。甲、乙兩參賽者分別擊球，球靜止位置離鈔票中心點較近者獲勝。



甲、乙擊球後，裁判拿尺仔細量得甲所擊球停在離球台左緣23公分，離球台下邊39.5公分處；乙所擊球停在離球台左緣40公分，離球台下邊27.5公分處。

甲所擊球停在離球台左緣40公分，離球台下邊27.5公分處。

- (1) 已知 $\sqrt{1521}$ 是一個正整數，求此正整數。(3分)
 - (2) 求甲所擊球停止位置與鈔票中心點的距離。(4分)
- (答案必須以最簡單的形式表示)
- (3) 如果你是裁判，你會裁定甲或乙獲勝？理由為何？(6分)

本題是想評量考生能否求出兩點間的距離，以撞球大賽為情境來判斷甲、乙球與千元鈔票中心點的距離，距離千元鈔票中心點較近者獲勝。

第(1)小題為求出 $\sqrt{1521}$ 的值，考生所採取的做法約有下列三種：

- (1) 利用質因數分解知 $1521 = 3^2 \times 13^2$ ，求出 $\sqrt{1521} = 39$ 。
- (2) 依據直式開方法 $\sqrt{15'21}$ ，求出 $\sqrt{1521} = 39$
- (3) 或是以推估方式求得，如： $40^2 = 1600, 39^2 = 1521$ ，求得 $\sqrt{1521} = 39$ 。

表十 第一大題之第(1)小題考生的作答情形統計表

第(1)小題作答情形	人數	百分比
未答或有寫一些跟答案無關的內容，可看出考不知該如何作答	141	10.8
計算過程中寫成 $\sqrt{1521} = \pm 39$	10	0.7
計算過程中寫成 $\sqrt{1521} = 39^2$	11	0.7
其他	33	2.3
完全正確	1180	82.3

表十是抽樣1433名考生的作答情形，在第(1)小題中近一成的考生是未答或寫一些與答案無關的內容；有8成的考生則能完全作對。考生在此小題中常出現的錯誤為，在計算過程中將 $\sqrt{1521}$ 寫成 ± 39 ，或將 $\sqrt{1521}$ 寫成 39^2 。

表十一 第一大題之第(2)小題考生的作答情形統計表

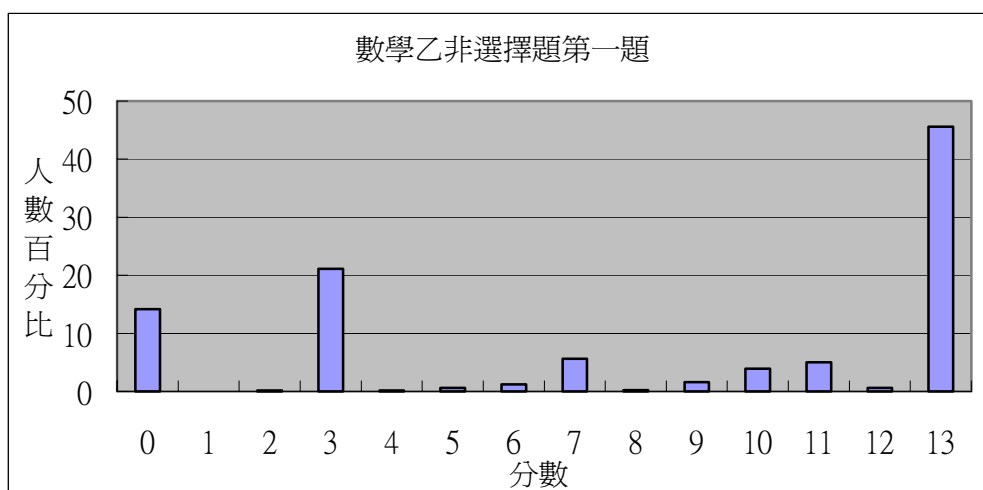
第(2)小題作答情形	人數	百分比
未答，或有寫一些跟答案無關的內容，可看出考不知該如何作答	330	23.1
直接寫 39，而無任何計算過程	5	0.3
甲球坐標(23,39.5)，鈔票中心點坐標(8,3.5)有一錯誤	35	2.4
利用距離公式寫出 $\sqrt{(23-8)^2+(39.5-3.5)^2}$ ，或利用距離公式直接寫出 $\sqrt{15^2+36^2}$ ，但答案只寫 $\sqrt{1521}$ ，沒有繼續化簡	7	0.5
利用距離公式寫出 $\sqrt{(23-8)^2+(39.5-3.5)^2}$ ，或利用距離公式直接寫出 $\sqrt{15^2+36^2}$ ，但計算結果非 39 或 $\sqrt{1521}$	55	3.8
利用距離公式，但誤寫成 $\sqrt{(23-3.5)^2+(39.5-8)^2}$	17	1.2
利用距離公式，僅求出甲球到原點距離 $\sqrt{23^2+39.5^2}$ ；或利用距離公式，先算甲球到原點距離 $\sqrt{23^2+39.5^2}$ 後，再減掉鈔票中心點到原點距離 $\sqrt{3.5^2+8^2}$ ，這兩種距離都不是甲球到鈔票中心的距離	17	1.2
有寫出 $\sqrt{\Delta^2+\circ^2}$ 形式，但裏面的數值有誤	97	6.8
看出邊長 5，12，13 的相似三角形，但比例算錯	1	0.1
找出鈔票中心到甲球的直線方程，再求甲球到直線的距離	1	0.1
其他	70	4.9
完全正確	774	54.0

第(2)小題是求甲球到鈔票中心點的距離，正確做法可分為兩種，一是定出甲球及鈔票中心點的坐標後，再利用距離公式求出這二點間的距離；二為定出坐標後，試著在坐標中畫出一個以甲球到鈔票中心點的距離為斜邊的直角三角形，再利用直角三角形中5,12,13的邊長比關係，求出甲球到鈔票中心點的距離。將抽樣1433名考生的答案卷作答情形歸納如表十一，約有2成的學生未答或寫一些與答案無關的內容，約有5成的考生能完全作對。從考生的作答情形發現，多半考生知道要利用距離公式來求解，但有些學生在定坐標時產生錯誤(約2%)；或計算錯誤(近4%)；或誤求成甲球到原點距離(約1%)；在其他的部分，有學生知道利用距離公式，但卻寫成 $\sqrt{\Delta^2 - O^2}$ 的形式，亦或寫成 $\sqrt{\Delta^2 + O^2}$ 形式，但裏面數值不知是如何得知，也看不出其數值與 $15^2 + 36^2$ 有關。另外，有考生只寫了39(或 $\sqrt{1521}$)而沒有計算過程，但因試卷中計算證明題的作答說明上詳述「同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分」，因此若無解題的過程與理由時，閱卷時是很難給到滿分。

表十二 第一大題之第(3)小題考生的作答情形統計表

第(3)小題作答情形	人數	百分比
未答或有寫一些跟答案無關的內容，可看出考不知該如何作答	144	10.1
只寫甲勝，或只寫乙勝，但沒有任何理由	49	3.4
主觀認為甲或乙的距離較近，沒有任何距離數據(如：我認為…)	220	15.4
直接在試題卷上用尺量出長度，而判斷甲或乙勝	6	0.4
乙球坐標(40,27.5)，鈔票中心點坐標(8,3.5)有一錯誤	15	1.0
利用距離公式寫出 $\sqrt{(40-8)^2 + (27.5-3.5)^2}$ ，或直接寫出 $\sqrt{32^2 + 24^2}$ ，但化簡結果非40或 $\sqrt{1600}$	48	3.3
利用距離公式，但誤寫寫成 $\sqrt{(40-3.5)^2 + (27.5-8)^2}$	6	0.4
利用距離公式，僅求出乙球到原點距離 $\sqrt{40^2 + 27.5^2}$ ；或利用距離公式，先算乙球到原點距離 $\sqrt{40^2 + 27.5^2}$ ，減掉鈔票中心點到原點距離 $\sqrt{3.5^2 + 8^2}$ ，這兩種距離都不是乙球到鈔票中心的距離	8	0.6
有寫出 $\sqrt{\Delta^2 + O^2}$ 形式，但裏面的數值有誤	77	5.4
看出邊長3, 4, 5的相似三角形，知道比例為放大8倍，得距離為40	6	0.4
因計算錯誤導出乙球的距離較甲的距離近，而判斷乙勝	64	4.5
其他	141	9.8
完全正確	608	42.4

第(3)小題是問若依比賽規則，該裁定甲、乙何者勝利?此題的做法為，算出乙球到鈔票中心點的距離後，再說明因甲球至鈔票中心點的距離較乙球到鈔票中心點的距離為近，因此判斷甲勝。將1433份抽樣卷分析整理後發現(見表十二)，約有一成的學生未答或寫一些與答案無關的內容；有四成多的考生則是能完全答對。另外，約有一成五的考生憑猜測來寫甲或乙勝，而沒有任何距離數據的依據，可能是因為此題是問會裁定誰獲勝所導致。



圖三 數學乙非選擇題第一題成績分佈圖

圖三為全體考生在本題的得分情形，零分的考生約13%，可見這群考生對 $\sqrt{1521}$ 的分解是有困難的；約20%的考生得3分，這些考生可能只答對第(1)小題；另外，由圖中可看出部分考生的分數集中於5-12分，原因是考生在列式上(定坐標、距離公式)、計算上有所出錯，使得無法在此題上拿得滿分；約有45%的考生得滿分。

第二題題目：

為預防禽流感，營養師吩咐雞場主人每天必須從飼料中提供至少84 單位的營養素A、至少72 單位的營養素B 和至少60 單位的營養素C 給他的雞群。這三種營養素可由兩種飼料中獲得，且知第一種飼料每公斤售價5 元並含有7 單位的營養素A，3 單位的營養素B 與3 單位的營養素C；第二種飼料每公斤售價4 元並含有2 單位的營養素A，6 單位的營養素B 與2 單位的營養素C。

- (1)若雞場主人每天使用 x 公斤的第一種飼料與 y 公斤的第二種飼料就能符合營養師吩咐，則除了 $x \geq 0, y \geq 0$ 兩個條件外，寫下 x, y 必須滿足的不等式組。(3分)
- (2)若雞場主人想以最少的飼料成本來達到雞群的營養要求，則 x, y 的值為何？最少的飼料成本又是多少？(10分)

本題是想評量考生能否將情境問題轉換成數學式，進而用線性規劃原理解題。

表十三 第二大題之第(1)小題考生的作答情形統計表

第(1)小題作答情形	人數	百分比
未答，或有寫一些跟答案無關的內容，可看出考不知該如何作答	289	20.2
以營養素 A、B、C 為變數列出錯誤的式子，如： $7A+3B+3C$ ； $2A+6B+3C$	24	1.7
列式中的變數 x 、 y 角色互換，使得列式錯誤，如 $2x+7y \geq 84$	1	0.1
列式中的變數並非是以 x 、 y 來表示，但數字及不等式符號皆正確	1	0.1
將不等式寫成等式 $7x+2y=84$ ，或寫成 $7x+2y > 84$ ，或 $7x+2y < 84$ ，或某個式子正確	81	5.7
列出奇怪或嚴重錯誤的式子	138	9.6
完全正確	846	59.1

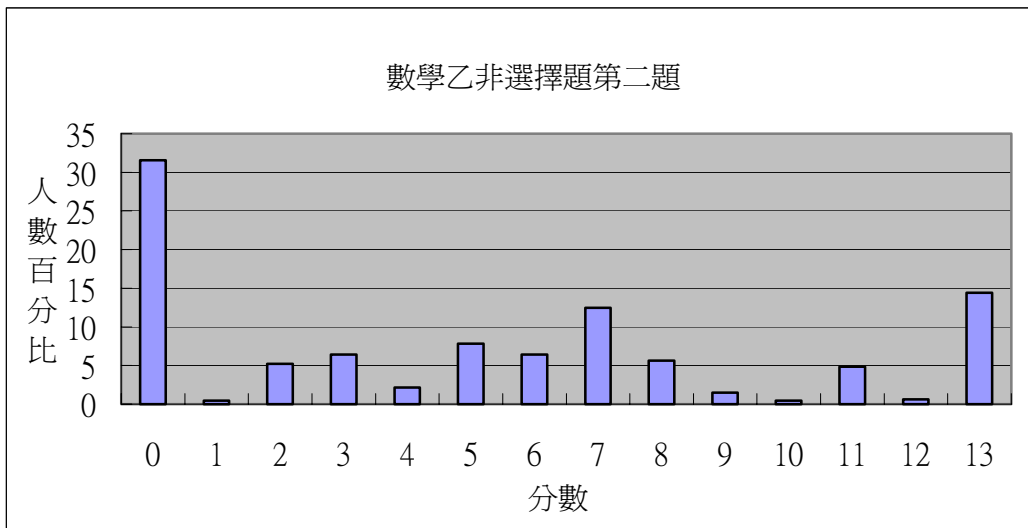
在第(1)小題中，是想測驗考生能否讀懂題意，並能寫出 x, y 必須滿足的不等式組。由表十三抽樣卷的分析結果知，有二成多的考生未答或寫一些與答案無關的內容；有近六成的考生能將不等式組完全列對；考生在列式時較有問題的是，會以營養素 A、B、C 為變數列式，或不等式符號寫錯，可能的原因是考生無法組織題意中所給的訊息，並辨識出題目中的數學元素來以數學式表達。

表十四 第二大題之第(2)小題考生的作答情形統計表

第(2)小題作答類型	人數	百分比
未答，或有寫一些跟答案無關的內容，可看出考不知該如何作答	462	32.3
方程式列對，但直線畫錯	67	4.6
方程式列對，直線畫對，但可行解區域標示錯誤	45	3.1
方程式列對，直線畫對，但可行解區域標示錯誤，因而認為最小值發生在(10, 7)	21	1.4
方程式列對，但求出錯誤的頂點坐標	118	8.2
方程式列對，圖形標示正確，但頂點坐標計算錯誤	54	3.7
方程式列對，但只求二個頂點(6,21)與(18,3)，代入目標函數中，雖仍可得最小值發生的點在 $x = 18, y = 3$ ，但方法不完備	89	6.2
方程式列對，所求之頂點也正確，但目標函數寫錯，使得最小值發生的點不在 $x = 18, y = 3$	7	0.4
方程式列對，所求頂點與目標函數皆正確，但代入目標函數後卻計算錯誤	3	0.2
方程式列對，所求頂點與目標函數皆正確，但卻未代入目標函數做比較，而直接判定最小值發生的點在 $x = 18, y = 3$	22	1.5
利用平行線法來解題，且在圖中畫出斜率 $m = -\frac{5}{4}$ 的平行線，或直接用文字說明「目標函數之斜率 $m = -\frac{5}{4}$ 介於斜率 $-\frac{3}{2}$ 與 $-\frac{1}{2}$ 之間」	29	2.0
完全正確	209	14.58

在第(2)小題中，是想測驗考生以線性規劃概念來解題時，先將可行解區域畫出，再使用平行線法：即利用目標函數 $f(x, y) = 5x + 4y$ 的斜率為 $-\frac{5}{4}$ 。因此，

當以 $f(x,y) = 5x + 4y = k$ 的直線掃動時，即可知成本的最小值會發生在 $x=18, y=3$ 時。亦可利用頂點法：將可行解區域的頂點求出後，再分別代入目標函數內比大小，得出成本的最小值。從抽樣卷的分析結果知(見表十四)，較少考生(約2%)是以平行線法的觀念來做，大部分考生是以頂點法來處理此題。有三成多的考生未答或寫一些與答案無關的內容；約一成五的考生則是能完全寫對。考生在這部分較有問題的是，方程式列對但直線畫錯(約4%)，這群考生在代數轉換成幾何圖形時可能有些困難；另有考生不等式列對，直線也畫對，但在可行解區域的標示上有誤(約3%)，這群考生在圖示不等式的學習上須再加強；有考生則是不等式列對，但在求頂點時算錯(約8%)，其中有3%的考生是圖形標示正確，但卻在解聯立方程式時將頂點算錯；另有考生只求了二個頂點後(約6%)，就得到最小值是發生在 $x=18, y=3$ ，完全看不出是以平行線法的概念來判斷。另有考生(約1%)則是四個頂點皆正確，但未將頂點代入目標函數中做比較，因此沒辦法得知考生是否利用平行線法，或頂點法來判斷出最小值所發生的點。



圖四 數學乙非選擇題第二題成績分佈圖

圖四為全體考生在本題的得分情形，其中得零分的考生有31%，可知這些學生在第(1)小題中列出不等式組就有問題；得7分的考生有12%，可能是因為不等式組列對，也寫出目標函數，但在解可行解區域的頂點時出錯，因而只拿到部分分數。在頂點法中，考生較常出現的問題是可行解區域標示錯誤，

進而影響頂點的正確性，以及在答題過程中沒有明確說明出是依據何種概念來判斷出最小值，此題約有14%的考生得滿分。

今年數學乙的計算證明題並不困難，所用到的解題概念皆很基本，主要是評量考生能從情境中建立平面坐標系，並能計算兩點間的距離及能利用線性規劃原理來解題，學生若能從情境中辨識數學元素，並能使用數學語言來回答問題，應可拿到不錯的分數。

結論

非選擇題是爲了進一步評量考生解題時的推理與表達能力，因此考生在作答時，應盡量呈現其解題過程或理由，宜避免直接寫答案，而無任何的計算過程，畢竟非選擇題解題的過程與理由，是閱卷委員評分時的重要依據。

大考中心每年均會針對數學甲、數學乙的非選擇題進行抽樣，並對所抽樣的試卷進行作答情形分析，是爲想瞭解學生在解題過程中所使用的概念與想法，且從中發現學生可能的迷思概念與錯誤類型，以提供給高中老師參考。此外，高中老師若對此分析有其教學經驗上的補充，亦歡迎老師與我們分享。