

94年度指定科目考試非選擇題評分標準說明

數學甲、數學乙

■朱惠文

編按：94年度指定科目考試非選擇題評分標準說明系列已刊出國文、英文、物理、化學、生物等五考科，本期繼續對數學甲與數學乙的評分原則提出說明，並提供各大題解題過程與參考答案供各界參考。另，本文所引解答過程只是可能得滿分情況之一，非唯一標準。

94年指定科目考試數學甲與數學乙的題型分為選擇題、選填題與計算證明題。選擇題的目的在於評量考生是否能判斷每個選項是否正確；考生可用不同的方式進行判斷。選填題的目的在於評量考生是否能主動算出正確答案，給分的關鍵在於答案是否正確；非選擇題主要評量考生是否能清楚表達解題時的推理過程，給分關鍵在於每一步推理過程是否合理。所以對於計算證明題，考生須用數學語言表達解題過程，也因為如此，可從考生的作答過程，發現其錯誤的觀念與做法。以下將從94指考數學甲與數學乙計算證明題的得分與抽樣卷考生的作答兩方面，探討非選擇題的難易度與學生的錯誤觀念。

數學甲

表一列出91至94年非選擇題得零分的考生人數與人數百分比。除92年因為SARS取消非選擇題以外，今年非選擇題零分的人數是最少的。表示學生對今年的非選擇題多半能下筆作答，尤其是第一題，只需機率的觀念即可。

表一 91至94年數學甲非選擇題零分統計表

年度	人數	百分比
91	11585	22%
92	無	
93	19211	33%
94	3910	7%

第一題題目：

袋中有三個一樣大小的球，分別標示10分、20分、30分。重複自袋中取出一球後放回，記錄得分並累加，其中取出各球之機率皆相等。

1. 求抽三次後總分為60分的機率。
2. 遊戲「過三十」的規則是重複抽球，直到總得分大於或等於30分後停止，總得分恰為30分者輸，超過30分者贏。求贏得此遊戲之機率。

第一小題的正確做法可分為兩部分，一是正確寫出總分為60分的所有情形，考生可以樹狀圖或是列表方式解答，第二部分是正確算出各情形的機率值。多數考生可以列出總分為60分的情形，但是列不完整，可是機率的觀念正確。我們抽樣714名考生的答案卷，將其作答分析歸納如表二，統計結果呈現不知如何下手以及完全正確的考生均約

$\frac{1}{3}$ 。



第二小題提供「過三十」的遊戲規則，請考生算出贏得此遊戲的機率。做法與第一題相似。第一步是正確寫出贏或輸的情形，第二步則是正確算出贏的情形之機率值。多半考生錯誤的原因，除了無法完整列出所有贏的情形外，考生可能是沒讀懂「過三十」的遊戲規

則，或是沒注意，仍是以第一小題總分為60分的情形解答。將第一小題同樣樣本考生的作答情形分析歸納如表三。由統計圖表可知完全不知如何下手的考生較第一小題多，將近 $\frac{1}{2}$ 。能夠完全正確的考生約 $\frac{1}{5}$ 。

表二 第一小題學生的作答情形統計表

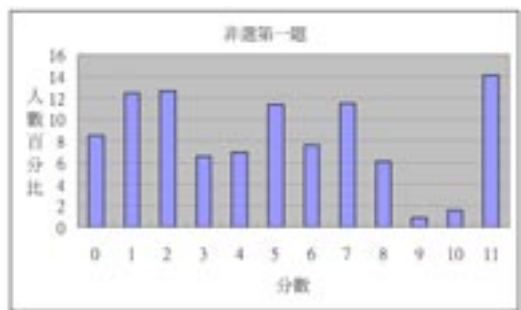
作答情形	人數	百分比
未答、完全不知如何下手、或是只有錯誤答案，沒有說明理由。 例如列出 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$ 。	207	29%
可列出總分為60分的所有情形，但是未算機率或是機率值計算錯誤。 例如把 (20, 20, 20) 算成 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times 3! = \frac{6}{27}$ 。	21	3%
可列出總分為60分的所有情形，但是每種情形的機率值計算正確。 例如只列出一種60分情形或是全部得分情形少於27種。	212	30%
列出總分為60分情形，但是機率值計算錯誤。	9	1%
未列出60分或是全部得分情形，但是列出機率算式以及機率值，而且所算的機率值正確。	21	3%
完整列出所有可能情形，而且機率計算正確。	228	32%

表三 第二小題學生的作答情形統計表

作答情形	人數	百分比
未答、完全不知如何下手、或是只有錯誤答案，不知所列式子是何用意，例如僅列出 $\frac{1}{3} \times \frac{1}{3} \times \frac{1}{3} = \frac{1}{27}$ ， $1 - \frac{1}{27} = \frac{26}{27}$ 。	337	47%
僅列出得分大於或等於30分的部分情形（包含輸或贏），未算機率，或是機率值算錯，例如仍依照第一小題得分六十分的情形規則計算第二小題。	57	8%
可列出贏或輸的所有情形，但是機率值計算錯誤。	68	10%
可列出贏或輸，但是機率觀念錯誤。	78	11%
未列出可能贏或輸的情形，但是列出機率算式以及機率值，而且所列的機率正確。	19	3%
完全正確。	135	19%



圖一為全體考生本題得分情形，零分的考生約8%，較往年來得少。多數考生集中於1分至8分，顯示考生雖不能完全作對，但是對於第一小題多能下筆作答，且過程正確，得到部分分數。本題若要完全正確，需具備分析歸納的能力，依照題意列出所有可能情形，以及計算機率的能力。這些能力可在修習數學過程中，逐步培養與加強的。



圖一 第一題成績分佈圖

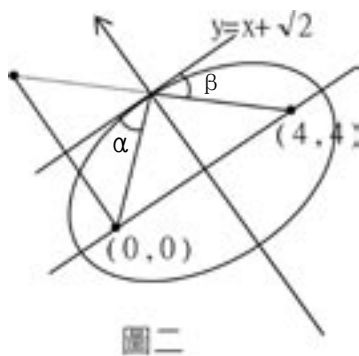
第二題題目：

平面上有一橢圓，已知其焦點為 $(0,0)$ 和 $(4,4)$ ，且 $y=x+\sqrt{2}$ 為此橢圓的切線。

1. 求此橢圓的半長軸長。
2. 設此橢圓方程式為 $Ax^2 + Bxy + Cy^2 + Dx + Ey = 1$ ，求 A 、 B 、 C 、 D 、 E 之值。

第一小題的正確答案為3，第二小題的正確答案為 $5x^2 - 8xy + 5y^2 - 4x - 4y = 1$ 。本題是評量橢圓的性質，切線的特性與距離概念等。本題的做法相當多元化。以第一小題為例，高中生可採取的做法約有下列三種：

- (1) 說明切線與長軸平行，推得焦點或中心到切線的距離等於半短軸長，進而求得半長軸長。



圖二

- (2) 利用橢圓的光學性質：橢圓的任意切線與過切點到兩焦點的連線所夾角度相等（如圖二），求得焦點對切線的對稱點坐標，則對稱點到另一焦點的距離即為長軸長。

- (3) 假設橢圓方程式為

$$\Rightarrow \sqrt{(x-0)^2 + (y-0)^2} + \sqrt{(x-4)^2 + (y-4)^2} = 2a,$$

將切線代入該方程式，因為切線與橢圓方程式交於一點，所以判別式等於零，解出 a 。

考生多半是採取第一種做法作答，但是，有些考生因點到直線距離公式記錯；或將短軸誤以為是長軸，實屬可惜。表四為歸納整理與第一題相同樣本考生的作答情形。將近 $\frac{1}{2}$ 的考生不知如何下手。可能是因為試題內所給橢圓非標準型，考生的第一反應覺得應該採旋轉平移做法，但是考生對其代數運算並不熟悉，而放棄作答。事實上，本題僅需要「橢圓的基本定義對標準型與非標準型橢圓均符合」的觀念，即可解答。

第二小題則是請考生直接寫出橢圓方程式。正確做法是引用第一小題所求出的半長



軸長，利用「橢圓上任一點到兩焦點距離和等於長軸長」，即可寫出：

$$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2} = 6, \text{ 化簡可得：}$$

$5x^2 - 8xy + 5y^2 - 4x - 4y = 1$ 。另一個做法是從旋轉平移著手，但是解題步驟較多，而且計算比較

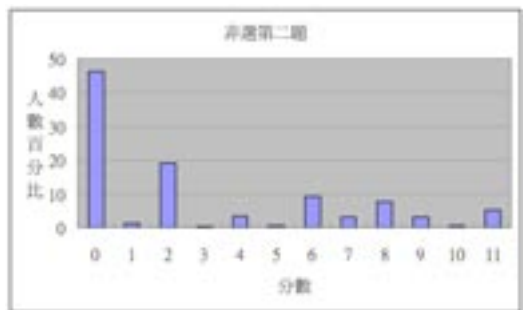
繁雜。將抽樣考生的答案卷作答情形歸納如表五。約七成的考生不知如何下手作答。能夠完全作對的只有4%，其中用旋轉平移完全作對的考生只有兩位。

表四 第一小題學生的作答情形統計表

作答情形	人數	百分比
未答或是完全不知如何下手。	387	54%
看出長軸與切線平行，之後卻不知如何作答。	10	1%
算出焦距，利用焦點或是中心點到切線的距離算出短軸，再算出長軸，但是計算錯誤。	41	6%
利用橢圓切線公式求解，但是不知如何求解。	21	3%
利用橢圓定義算出 $\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2} = 2a$ 。	35	5%
沒有說明長軸與切線平行，直接得出中心點與切點的距離為短軸。	7	1%
完全正確。	193	27%

表五 第二小題學生的作答情形統計表

作答情形	人數	百分比
未答、完全不知如何下手、或是橢圓定義不清楚。	504	71%
利用橢圓定義，寫出 $\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(x-4)^2+(y-4)^2} = 2a$ ，或是 $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1$ ，但是未再計算，或是計算過程錯誤。	36	5%
寫出橢圓標準式，再利用平移旋轉求解，但是過程有錯。例如一開始橢圓標準式就寫錯，寫成 $\frac{(x-2)^2}{9} + \frac{(y-2)^2}{1} = 1$ 。	50	7%
寫出橢圓標準式，再利用旋轉平移求解，但是過程有錯。例如利用 $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{1} = 1$ ，旋轉得 $\frac{(\frac{x+y}{\sqrt{2}})^2}{9} + \frac{(\frac{x-y}{\sqrt{2}})^2}{1} = 1$ ，但是忘記平移或是平移錯誤。	43	6%
一開始橢圓標準式就寫錯，但是沒有利用平移或旋轉，直接展開。	46	6%
完全正確。	29	4%



圖三 非選第二題成績分佈圖

圖三是第二小題的得分情形。零分的考生約45%。約 $\frac{1}{5}$ 的考生得到2分，這些考生可能只能列出橢圓方程式，或是只能算出焦距，接下來就不知道應該如何作答了。約 $\frac{1}{10}$ 的考生可以求得半長軸長，但是無法求得橢圓方程式。

今年兩題計算證明題，第一題評量考生從試題中辨識數學元素，分析整理可能情形，以及機率基本概念；第二題評量考生橢圓的定義與性質，以及數字運算能力。這兩題所用到的解題觀念均很基本，也很重要。但從考生的得分與作答反應，有關數學基本觀念的了解與應用，與數學符號的運算等都需要再加強。

數學乙

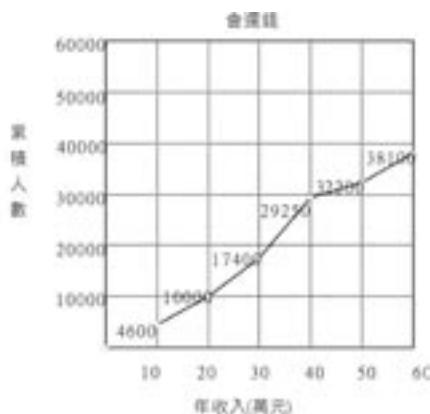
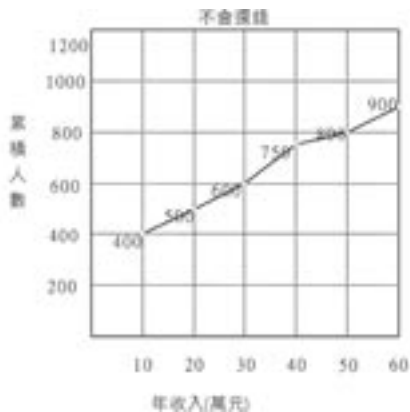
表六列出91至94年非選擇題得零分的考生人數與人數百分比。除92年因為SARS取消非選擇題以外，今年非選擇題零分的人數是最多的。以下就94年數學乙非選擇題的得分與抽樣生的作答情形，探討為何今年非選擇題零分的人數將近 $\frac{1}{3}$ 。

表六 91至94年數學乙非選擇題零分統計表

年度	人數	百分比
91	6155	7%
92	無	
93	13348	14%
94	31808	33%

第一題題目：

某銀行檢討『一年期20萬元的小額急用貸款，一年後還款21萬元』的申請資格。過去幾年的記錄顯示：申辦此項貸款者一年後只有依約還款21萬元與違約不理(1元都不還)兩種情形，沒有還一部分錢等其他情形發生；且發現會還錢或不會還錢者與其年收入有關，兩者的累積次數分配部分圖形如下：





(1)一個年收入30萬元以下的貸款者，會還錢的機率為何？

(2)銀行貸款給一個年收入30萬元以下的客戶，銀行的獲利期望值為多少元？

本題是以「小額急用貸款」為背景，將申辦貸款情形分為還款與違約不理兩種情形，而且還款與否與年收入有關，亦即，依照年收入不同，還款、不還款人數也有所不同。試題另附還款與不還款兩者的累積次數分配圖。第一小題請考生算出年收入30萬元以下的貸款者，會還錢的機率。本題的正確做法分為兩步驟，一是讀懂題意與累積次數分配圖，得知年收入在30萬元以下的貸款

者，不會還錢的有600人，會還錢的有17400人；二是正確算出還錢的機率是 $\frac{17400}{18000}$ 。這兩步驟均不困難，而且考生應不陌生。多數考生沒注意到累積人數分配圖，而作答

$\frac{4600+L+17400}{(400+L+600)+(4600+L+17400)}$ ，這群考生會算機率，但是粗心錯誤，而沒有得到分數，實屬可惜。我們抽樣1652名考生的答案卷，將其作答情形歸納整理如下。約 $\frac{1}{3}$ 考生列式錯誤，列式錯誤原因可歸類為以下三點：

- (1) 沒有讀懂題意所述「還錢與不會還錢」兩種情形，以及累積人數分配圖，而誤以為母數為還錢人數的加

表七 第一小題學生的作答情形統計表

作答情形	人數	百分比
未答。	293	18%
沒有看出累積人數分配圖，而利用400+500+600+4600、、、計算而得。	181	11%
列式錯誤，例如 (A) $\frac{4600+10000+17400}{4600+10000+17400+29250+32200+38100}$ (B) $\frac{17400}{900+38100}$ (C) $\frac{17400}{300000}$ (D) $\frac{17400}{600000}$	468	28%
知道母數為17400+600，卻加錯得到20000或其他答案。	23	1%
直接算會還錢的機率，得到正確的 $\frac{17400}{18000}$ 或 $\frac{29}{30}$ 。	542	33%
先算不會還錢的機率，再算會還錢的機率。	24	2%
誤算成不會還錢的機率，得到 $\frac{600}{18000}$ 。	30	2%



總，求得

$$\frac{4600+10000+17400}{4600+10000+17400+29250+32200+38100}$$

- (2) 誤解試題敘述「與年收入有關」，以為母數為年收入60萬元的加總（即900+38100），求得機率值為

$$\frac{17400}{900+38100}$$

- (3) 將人數與年收入搞混了，而誤以為母數為30萬元，還錢人數為17400，列式得

$$\frac{17400}{300000}$$

第二小題請考生算出銀行的獲利期望值。正確的做法為列出還錢與不會還錢，銀行的獲利各為多少。再列出銀行的獲利期望值為

$10000 \times \frac{29}{30} - 200000 \times \frac{1}{30} = 3000$ 元。多數考生其實只對期望值一知半解，導致列式錯誤，其情形大致可歸納成以下三點：

- (1) 誤以為期望值只需要計算還錢的部分，而求得 $10000 \times \frac{29}{30}$
- (2) 誤以為還錢時，銀行的獲利為210000，忘記應該要扣掉成本，而得 $210000 \times \frac{29}{30} - 200000 \times \frac{1}{30}$
- (3) 誤以為沒有還錢時，銀行的獲利還是200000，而得

$$10000 \times \frac{29}{30} + 200000 \times \frac{1}{30} = 3000$$

表八為抽樣生作答情形的統計表。約

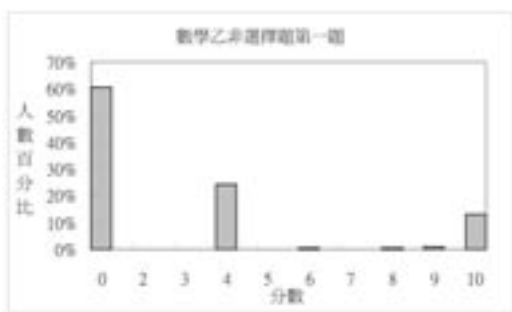
表八 第一小題學生的作答情形統計表

作答情形	人數	百分比
未答。	293	18%
列出正確的期望值式子 $10000 \times \frac{29}{30} + (-200000) \times \frac{1}{30}$ 。	181	11%
列式錯誤，例如 (A) $10000 \times \frac{29}{30}$ (B) $210000 \times \frac{29}{30} - 200000 \times \frac{1}{30}$ (C) $10000 \times \frac{29}{30} + 200000 \times \frac{1}{30}$	680	41%
可以列出正確的期望值式子，但是計算錯誤。	100	6%
直接以總人數計算（17400,600），忘記除以總人數。	16	1%
用成本想法 $(210000 \times \frac{29}{30} + 0 \times \frac{1}{30}) - 200000$ ，但是忘記減200000。	31	2%
完全正確。	204	12%



$\frac{1}{5}$ 的考生可以寫出正確的期望值算式，但是有6%的考生計算錯誤。

圖四為全體考生的成績分佈圖。約六成的考生得零分。約25%的考生得4分，這群考生可能只能求得第一小題還錢的機率值，但是對第二小題期望值並不熟悉。



圖四 非選第一題成績分佈圖

本題所涉及的數學知識很基本，計算也很簡單，但是約六成的考生得零分，表示這群考生對正確理解統計圖表，以及基本機率運算尚待加強。這樣的情形實在是滿令人感到意外。因為統計圖表的閱讀是在小學就已經修習過，而且第一小題所涉及的機率觀念，是很容易理解的。從考生的作答結果，亦顯示學生將文字轉換成數學符號，以及圖表的解讀，事實上是有些不適應，但是這兩方面的能力，是數學乙考生必須具備的。另外，有關數字的操弄方面，計算錯誤亦是造成該題得分偏低的原因之一，例如誤將 $17400+600$ 算成 200000 ；或是列出正確的期望值算式，但是卻計算錯誤。這些其實可藉由平日的訓練而避免的。

表九 第一小題學生的作答情形統計表

作答情形	人數	百分比
未答。	293	18%
化簡正確。	612	37%
代入化簡 $\frac{y(x)}{1-y(x)}$ ，但是不熟悉指數運算。	156	9%
用底數大於1的指數函數 2^x 遞增說明。	56	3%
利用 $r(x+1) - r(x)$ 相減 > 0 相除 $\frac{r(x+1)}{r(x)} >$ 正確證明。	147	9%
繪 2^x 圖正確證明。	28	2%
用數學歸納法正確說明。	45	3%
列式錯誤，例如 (A)誤以為底數大於零，就是增函數。 (B)誤以為 $y(x)$ 增加， $1-y(x)$ 減少，所以 $r(x)$ 必增加。	536	32%
證明是以離散方式證明，只代數點證明。	178	11%
完全正確。	251	15%

第二題題目：

根據過去長期統計資料顯示：某公司推銷員的年資 x (年)，與每次推銷成功的機率 $y(x)$ ，滿足下列關係式： $y(x) = \frac{2^{-3+2x}}{1+2^{-3+2x}}$

(1)化簡 $r(x) = \frac{y(x)}{1-y(x)}$ ，並說明 $r(x)$ 的值隨 x 增大而增大(即 $r(x)$ 為遞增函數)。

(2)說明年資8年(含)以上的推銷員，每次推銷不成功的機率小於4%。

本題表面上看是評量機率的問題，事實上是評量函數的遞增與遞減。第一小題是化簡

$r(x) = \frac{y(x)}{1-y(x)}$ ，僅需將 $y(x) = \frac{2^{-3+2x}}{1+2^{-3+2x}}$ 代入作指

數運算即可求得 $r(x) = \frac{1}{8}2^x$ 。第二部分則需要證明 $r(x)$ 是遞增函數。做法有很多種，考生所採取的正確做法大致有以下三種：

- (1) 因為 2^x 是底數大於1的指數函數，所以 2^x 為遞增函數
- (2) 畫出 2^x 圖形說明函數為遞增
- (3) 利用 $r(x+1) - r(x) > 0$ 或是 $\frac{r(x+1)}{r(x)} > 1$ 說明 $r(x)$ 為遞增函數

多數考生作答錯誤的原因在於以離散方式證明函數遞增，亦即只代入數點，就說明函數是遞增，這個錯誤其實是很嚴重的觀念錯誤。考生其實並不了解何謂函數，而誤以

表十 第一小題學生的作答情形統計表

作答情形	人數	百分比
未答。	293	18%
用第一小題 $r(x)$ 遞增，所以 $y(x)$ 遞增，或直接說明 $y(x)$ 遞增，但沒有說明理由。	52	3%
只用 $x=8$ 或是 $x=8,9$ 代入說明 $y(x)$ 遞增。	68	4%
一開始不等式搞錯方向，寫成 $1-y(x) > 4%$ 。	482	29%
用數學歸納法證明，但僅說 k 成立， $k+1$ 成立，沒有過程。	16	1%
計算時，不知道 $\frac{32}{33} > 96%$ 。	18	1%
用離散方法說明 $1-y(x)$ 遞減， $y(x)$ 遞增。	321	19%
列式錯誤，例如 (A)用 $x=8,9$ 等代入發現 $y(x)$ 增加，所以 $y(x)$ 為增函數。 (B) $\because \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2^{-3+2x}}{1+2^{-3+2x}} = 1 \therefore y(x)$ 是增函數。 (C) $r(x) = 2^{-3+2x} \Rightarrow r'(x) = (-3+2x)2^{2x-3} \therefore y(x)$ 是增函數。 (D)將 $r(x)$ 誤以為是 $y(x)$ 。 (E)取對數，但是計算錯誤。	574	35%
完全正確(多半考生是以數學歸納法證明或是正確說明 $y(x)$ 遞增)。	88	5%



為只要某個區間的函數值為遞增，表示該函數即為遞增函數。也有考生誤以為底數大於零的指數函數即為遞增函數。將抽樣考生的作答情形歸納整理如表九。化簡正確的考生約有37%。

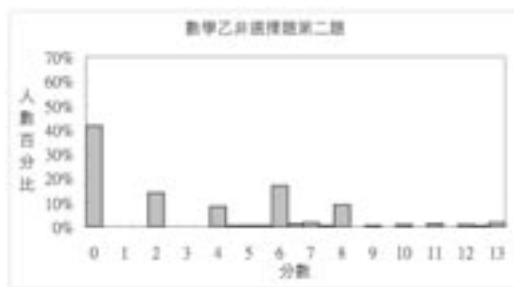
第二小題的做法可引用第一小題的結果說明。因為推銷成功的機率為 $y(x)$ ，不成功的機率為 $1-y(x) = \frac{1}{1+2^{-2x}}$ 。由第一小題 $r(x) = \frac{1}{8}2^x$ 為遞增函數，所以不成功的機率為遞減函數，可得知當 $x \geq 8$ 時， $f(x) \leq f(8) = \frac{1}{33} < 4\%$ 。除了這個做法以外，還可直接說明 $y(x)$ 為遞增函數；或採數學歸納法；或依題意列出 $1-y(x) < 4\%$ ，經由運算得出 $2^x > 192$ 。多數考生採取此方法，但是一開始不等式大小搞錯了，列成了 $1-y(x) > 4\%$ 。其它比較嚴重的錯誤與第一小題相同；考生誤以為代 $x=8$ 、 $x=9$ 等數點即表示 $1-y(x)$ 為遞減函數。表十為與第一題同樣本考生的作答情形統計表。

圖五列出全體考生的成績分佈圖。零分的考生約四成，近 $\frac{1}{10}$ 的考生可以得到2分，這群考生可能會化簡 $r(x)$ ，以下就不會做了。約18%的考生可以到6分，這群考生可能只會第一小題，第二小題就不知如何說明；或是僅能化簡與第二小題的列式。本題全對的考生不到5%。得分率不高的原因可歸類成下列兩點：

- (1) 誤以為函數值於有限範圍內遞增，即為遞增函數；或是誤以為整數點的函數值遞增，即為遞增函數

- (2) 誤解題意「年資8年(含)以上的推銷員，每次推銷不成功的機率小於4%」列成 $1-y(x) > 4\%$

第一個是數學基本函數觀念錯誤；第二個則是讀懂題意，並將題意轉成數學式有誤，這兩個能力都是數學乙考科所要評量的，而且亦是選擇數學乙的大學科系所要求的。^{註1}



圖五 非選第二題成績分佈圖

結論

非選擇題評量考生是否能用數學語言表達解題過程，從學生的解題過程中，可以發現哪些其實是考生錯誤的概念或是想法。有些觀念是命題者、甚至是高中老師亦沒想到的。例如數學乙的非選第一題，所測的觀念很基本；用到的計算很簡單；但是考生卻誤讀統計圖表，與歷年相關統計圖表考題相比，得分率降低許多。大考中心每年均會針對非選擇題，抽樣數份考生的試卷進行作答情形分析，也期盼高中老師能夠給予您教學上的經驗，與我們分享。(作者為本中心研究人員)

1 數學考科之規劃--子計畫三：指定科目考試數學乙之定位研究，2000，大學入學考試中心