

99 學年度指定科目考試 數學乙非選擇題考生作答情形分析

【第一處 / 陳慧美】

每年指考成績單寄發後，有些考生認為我的數學乙考科非選擇題，答案明明正確，為什麼無法得到該題的滿分，甚至 1 分未得？本文就此一疑問，說明本年度數學乙非選擇題僅得到部分題分或是 1 分未得的可能情形，以及數學科非選擇題給分的大原則，希望能藉此釐清部分考生的疑惑。以下各題會從兩方面進行分析，一是正確的解題步驟，二是考生解題的錯誤概念或解法。

第一題：

題目：設 a, b, c, d 都是 20 以內的正奇數，考慮五次整係數多項式函數

$$p(x) = x^5 + ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + 2。$$

(1) 試問滿足上述條件的五次整係數多項式函數 $p(x)$ 共有多少個？(4 分)

(2) 試求多項式方程式 $x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 3x + 2 = 0$ 的所有整數根。(8 分)

分析：

本題評量欲藉由多項式函數為素材，以第(1)題評量排列組合計數方法，屬於高二下課程；第(2)題評量整係數多項式一次因式檢驗法，屬於高一上課程。

第(1)小題

(一) 正確解題步驟：

第一小題解題概念有以下二個：

(1) 瞭解何謂正奇數，並指出 20 以內的正奇數有 10 個。

(2) 再利用乘法原理求出滿足上述條件的 $p(x)$ 有 $10 \times 10 \times 10 \times 10$ (或 10^4 ，或 10000) 個。

(二) 錯誤概念或解法：

考生在此小題只要寫出滿足上述條件的五次整係數多項式函數的 $p(x)$ 有 $10 \times 10 \times 10 \times 10$ (或 10^4 ，或 10000) 即可得滿分；無法寫到該答案者，若能提及 20 以內的正奇數有 10 個，亦可得到部分分數。考生在此小題最常犯的錯誤有：

1.不曉得何謂正奇數

部分考生列舉正奇數時，將偶數穿插於其中，以致無法得分。

2.未指出 20 以內的正奇數有 10 個

此類考生最常遇到的問題是將正奇數個數算錯，使得後續的乘法原理亦算錯，因而無法得分。

3.指出 20 以內的正奇數有 10 個，但後續求解錯誤

部分考生在計算 a, b, c, d 的組成情形時，想成從 10 個正奇數中選 4 個，因而算成 C_4^{10} ；或想成由 10 個正奇數中取出 4 個不同數字排列得 P_4^{10} ；或寫出 10 個正奇數後就不知該如何作答。這些考生因未能正確利用乘法原理求解，故僅能拿到部分分數。

第(2)小題**(一) 正確解題步驟：**

設 $p(x) = x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 3x + 2$

1.指出 $x = -2$ 是 $x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 3x + 2 = 0$ 的根。

2.正確說明為何僅有 $x = -2$ 是 $x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 3x + 2 = 0$ 的根，例如：

(1)利用一次因式檢驗法說明 $p(x) = x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 3x + 2$ 的可能因式為

$x + 1, x - 1, x + 2, x - 2$ ，再將 x 以 $-1, 1, -2, 2$ 代入檢驗，得僅有 $x = -2$ 為其根。

(2) $p(x) = 0$ 因式分解成 $(x + 2)(x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 1) = 0$ 後，仍須完整說明

$f(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 1 = 0$ 無其他整數根，完整說明可見後面詳解。

(二) 錯誤概念或解法：

在此小題中，考生較易出錯的情形有以下幾類：

1.知道利用一次因式檢驗法，但說明未盡完善

在解一中，部分考生寫出整數根僅可能為 $\pm 1, \pm 2$ ，卻未將 x 以 $-1, 1, -2, 2$ 代入檢驗，以說明僅有 $x = -2$ 為其根。同理在解二中，考生寫出 $f(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 1 = 0$ 的整數根僅可能是 ± 1 ，亦未將 x 以 $-1, 1$ 代入檢驗，以說明無其他整數根。上述考生皆是因演算過程未盡完善，故無法得到完整分數。

2.寫出答案，但推理過程有誤

部分考生僅以列舉方式說明 $x = -2$ 為 $x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 3x + 2 = 0$ 的根，並未說

明為何無其他整數根；或嘗試以一次因式檢驗法說明，但寫出整數根的可能值時，卻寫出 $\pm 1, \pm 2$ 以外的根，可見其對一次因式檢驗法的觀念不甚清楚。此外，有些考生將算式分解為 $(x+2)(x^4+x^3+3x^2+x+1)$ 後，直接說 $x=-2$ 為

$x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 3x + 2 = 0$ 的根，並未說明 $f(x)$ 恆為正或無實根的理由，因而無法得到全部分數。上述考生雖能寫出題目答案，但因對一次因式檢驗法的概念不熟悉，或未寫出 $f(x)$ 恆為正或無實根的理由而被扣分。數學科非選擇題主要評量用數學式清楚表達解題過程的能力，因此列式、推理過程是否正確、邏輯判斷是否合理，均為評定分數的重要依據。

第二題：

題目：小惠有一台自行車，平時用一副四位數密碼的號碼鎖鎖住。有一天，志明向她借用這台自行車，她答應借用，但只告訴志明號碼鎖的密碼 $abcd$ 符合以下二階方陣的等式：

$$\begin{bmatrix} 5 & -15 \\ -10 & 35 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix},$$

志明卻一直無法解出正確的密碼，而不能使用這台自行車。請你(妳)幫忙志明求出這副號碼鎖的正確密碼。(12分)

分析：

本題評量能否求解反方陣，或解聯立方程式，屬高三選修課程，常見解法如後面詳解所列。除此，尚有考生利用高斯消去法求反矩陣，若過程、答案正確亦可得分。

(一) 正確解題步驟：

1. 利用矩陣乘法列出聯立方程組後，求解 a, b, c, d 之值；或利用反矩陣求出 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ 之值。
2. 正確寫出四位數密碼 $abcd$ 之值。

(二) 錯誤概念或解法：

以下列舉說明此題無法得分或得部分分數的幾個可能情形，例如：

1. 計算錯誤

常見的情形有反矩陣算錯，部分考生知道 $\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -15 \\ -10 & 35 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix}$ ，但在求反矩陣

$\begin{bmatrix} 5 & -15 \\ -10 & 35 \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 35 & 15 \\ 10 & 5 \end{bmatrix}$ 時，不是 $\det A$ 算錯，就是忘記除以 25，或是約分時計算錯誤，因此僅能得到部分分數。或有些考生利用矩陣乘法列出聯立方程組後，因計算錯誤而無法得到正確的 $abcd$ 之值，以致無法得到完整分數。

2. 過程正確，但密碼未以四位數字表列之

因題目所述為「…但只告訴志明密碼鎖的密碼 $abcd$ …，請你(妳)幫忙志明求出這副號碼鎖的正確密碼。」，考生計算完後，答案應以四位數字表列出密碼，部分考生因以矩陣型式表示答案，故無法得滿分。

3. 寫出答案，但推理過程錯誤

部分考生以錯誤的方式執行矩陣乘法，仍得出正確答案，如：

$$\begin{cases} 5a - 10b = 5 \\ -15a + 35b = 0 \end{cases} \text{ 與 } \begin{cases} 5c - 10d = 0 \\ -15c + 35d = 5 \end{cases}, \text{ 此時答案雖正確，但因考生矩陣乘法概念有誤，故}$$

無法得分；有些考生看似利用解三求解，在兩邊同除以 5 時，有考生一邊除以 5，但另一邊未除 5，最後在答案的部分又自動除以 5，此舉雖得到正確答案，但因推理過程不正確，故無法得分；另有考生一劈頭就假設 $a=7, b=3, c=2, d=1$ ，再代入矩陣中說明確實為其解，因未說明如何求得 a, b, c, d 之值，故無法得分。

上述情形，有些是錯誤的基本概念或知識，例如矩陣乘法錯誤，或反矩陣公式背錯，或推理過程不合理，故無法得分；有些考生知道如何求解，亦能列出正確算式，但過程中計算錯誤。建議考生在修習數學時，要先理解數學基本概念，才能應用正確的概念解題，及寫下解題過程時，應注意推理與計算是否正確，才不會因計算錯誤而失分。

數學甲與數學乙的題型有選擇、選填與非選擇題。選擇題與選填題，只要答案正確，即可得到全部分數。但非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數¹。本文說明正確的解題概念與步驟，以及得部分分數與無法得分的可能情形，主要用意在於提供老師教學或學生平常練習時的參考。若考生對自己的非選擇題成績有疑慮，可以申請複查，大考中心會調閱考生答案卷，重新檢視成績²。

¹ 吳家怡(民 93)，我的數學甲非選擇題得分了嗎。選才通訊，第 120 期。

² 大考中心(民 97)，大學入學考試中心說明稿。大考中心網站：<http://www.ceec.edu.tw>

數學乙參考解法：

第一題

第(1)小題

(甲) 瞭解 20 以內的正奇數有 10 個。

(乙) 由乘法原理知，滿足上述條件的五次整係數多項式函數的 $p(x)$ 有 $10 \times 10 \times 10 \times 10 \times 10$ (或 10^4 ，或 10000) 個。

第(2)小題

設 $p(x) = x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 3x + 2$

【解一】

1. $p(x)$ 是整係數多項式，其一次整係數因式僅有以下四種： $x + 1, x - 1, x + 2, x - 2$ 。

2. 檢驗何者為 $p(x)$ 的根

$p(-1) \neq 0$ ，故 $x = -1$ 不是 $p(x) = 0$ 的根；

$p(1) \neq 0$ ，故 $x = 1$ 不是 $p(x) = 0$ 的根；

$p(-2) = 0$ ，故 $x = -2$ 是 $p(x) = 0$ 的根；

$p(2) \neq 0$ ，故 $x = 2$ 不是 $p(x) = 0$ 的根。

綜合上述可知 $p(x) = 0$ 僅有一個整數根 $x = -2$

註：由 $p(x)$ 的係數均為正數，可判斷 $p(x) = 0$ 不可能有正根，亦可由奇偶性判斷出

$p(x) = 0$ 不可能有奇數根。

【解二】

1. 將方程式分解為 $(x+2)(x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 1) = 0$ ，

2. 以下提供幾個方法說明 $f(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 1 = 0$ 無其他整數根。

【甲】 $f(x)$ 恆大於零，理由如下：

$x = 0$ 時， $f(0) = 1 > 0$ ；

$x \neq 0$ 時， $f(x) = x^4 + x^3 + 3x^2 + x + 1 = x^2(x^2 + x + 1) + (2x^2 + x + 1)$ ，各項均恆大於零，所以無其他整數根。

【乙】以一次因式檢驗法檢驗

因 $f(x)$ 的一次整係數因式僅可能為 $x+1, x-1$ ，但將 $x=1, -1$ 代入後，發現 $f(1), f(-1)$ 均不為

0，故 $f(x)=0$ 無其他整數根。

故可知僅有 $x=-2$ 是 $x^5 + 3x^4 + 5x^3 + 7x^2 + 3x + 2 = 0$ 的根。

第二題

【解一】

$$(1) \text{ 解 } \begin{cases} 5a-15c=5 \\ -10a+35c=0 \end{cases}, \text{ 得 } a=7, c=2$$

$$(2) \text{ 解 } \begin{cases} 5b-15d=0 \\ -10b+35d=5 \end{cases}, \text{ 得 } b=3, d=1$$

(3) 由(1)(2)可知密碼為 7321

【解二】

$$(1) \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -15 \\ -10 & 35 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} = \frac{1}{25} \begin{bmatrix} 35 & 15 \\ 10 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 0 & 5 \end{bmatrix} \\ = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(2) 得知密碼為 7321

【解三】

$$(1) \text{ 將已知條件的等號兩邊同除以 } 5, \text{ 得到 } \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(2) \text{ 所以 } \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -2 & 7 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} 7 & 3 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

(3) 得知密碼為 7321