

數學乙非選擇題考生作答情形分析

陳慧美

指考成績寄發後，有考生會申請複查，提出為何我的數學乙考科非選擇題答案明明正確，卻為何未得到該小題的滿分，關於此疑問，特別於本文說明考生無法得分的可能作答情形，希望藉此釐清部分考生的疑惑。各題參考解答請見附件。

試題

- 一、某製造玩具工廠，每次接到訂單都需開模 5 萬元，製造每一千個玩具材料費需 2 萬元，由此建立生產的基本成本函數 $f(x)=5+2x$ ，其中 x 以千個為單位。依過去經驗，接到訂單數量與報價總值有如下關係：

數量(千個)	報價總值(萬元)
5	37.5
10	70
15	97.5

以此資料建立一個二次函數的報價總值函數 $g(x)$ ，以及獲利函數 $h(x)=g(x)-f(x)$ 。

- (1) 若接到訂單為 20 千個，試問交貨時，每千個玩具的基本成本平均是多少萬元？（2 分）
- (2) 試求報價總值函數 $g(x)$ 。（7 分）
- (3) 根據 $h(x)$ ，試問訂單數量是多少時，獲利總值最高？（5 分）

考生作答情形分析

第一大題分為三小題，其中第(1)小題欲評量考生能否了解平均的概念，正確的解法為先將 x 以 20 代入基本成本函數 $f(x)=5+2x$ 中，再求其每千個玩具的基本成本平均是多少萬元。由於計算式中的分子與分母所代表的單位不同，使得部分考生會將 $\frac{45}{20}$ 寫成 $\frac{450}{20}=22.5$ 萬元，因而得零分。

但考生若以其他算式或數字呈現時，且有註明個數或金額單位，如：寫成 $\frac{450}{20}=22.5$ 千元，或每個 22.5 元者，皆可得到該小題的 2 分。

在第(2)小題中，欲評量考生能否正確的列式並求出該函數。此小題的正確解題可分為二步驟，第一步驟為列式代值，如：設報價總值函數為 $g(x)=ax^2+bx+c$ ，再將題目中的訂單數量與報價函數代入 $g(x)$ 後得三個聯立方程組。第二步驟求解聯立方程組，以求得正確的 a 、 b 、 c 之值。此外， $g(x)$ 亦可假設成 $g(x)=a(x-c)^2+d$ 或 $g(x)=a(x-5)(x-10)+b(x-10)+70$ 求解。

有些考生一開始就無法假設出二次函數的型式，因而一分未得。此外，多數考生在以 $g(x) = ax^2 + bx + c$ 求解時，雖求得正確的聯立方程組，最後卻解錯 a 、 b 、 c 之值，或僅列出一至二組正確的方程式者，皆僅能得到該題的部分分數。除此，另有考生誤將 $g(x)$ 求解成 $h(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 6x - 5$ ，雖求得正確的 $h(x)$ ，但因本題所求為 $g(x)$ ，因此亦僅能得到該小題的部分分數。

此外，部分考生認為「當訂單數量為 0 時，報價總值就應該是 0 元」，因此直接設函數 $g(x) = ax^2 + bx$ ，接著只需用兩個題幹假設條件就可解出 $g(x)$ ，所得答案雖然正確，但因考生未檢驗所得 $g(x)$ 確實滿足解題時未用的另一題幹假設條件，這在數學解題上是錯誤的，因此這些考生雖答案正確，卻無法得到該小題的滿分。

第(3)小題欲評量二次多項式的最大值，正確的解題步驟有二，步驟一利用第(2)小題中的 $g(x)$ ，減去 $f(x)$ 後，可得 $h(x)$ 。步驟二再利用配方法或公式解 ($x = -\frac{b}{2a}$) 求得：當 $x = 30$ 時獲利總值最高。

考生於第(3)小題較常發生的錯誤是 $h(x)$ 算對，但利用配方法求解時卻計算錯誤，因而得到錯誤的 x 值，故該小題僅能得到部分分數。此外，有考生未求出 $h(x)$ ，僅利用題目的訂單數量，報價總值及成本函數列舉出數個數據，比較得 $x = 30$ 時獲利最高，此解法因未能確實說明為何 $x = 30$ 時獲利最高，且從數據中亦無法看出 $h(x)$ 的函數型式，因此未能得到任何分數。

試題

二、設有 A、B 兩支大瓶子，開始時，A 瓶裝有 a 公升的純酒精，B 瓶裝有 b 公升的礦泉水。每一輪操作都是先將 A 瓶的溶液倒出一半到 B 瓶，然後再將 B 瓶的溶液倒出一半回 A 瓶（不考慮酒精與水混合後體積的縮小）。設 n 輪操作後，A 瓶有 a_n 公升的溶液，B 瓶有 b_n 公升的溶液。已知二階方陣 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 滿

$$\text{足 } \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}。$$

(1) 求二階方陣 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 。(5 分)

(2) 當 $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}$ 時，求 a_{100} 及 b_{100} 。(4 分)

(3) 當 $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}$ 時，在第二輪操作後，A 瓶的溶液中有百分之多少的酒精？
(5 分)

考生作答情形分析

第二大題亦分為三小題，其中第(1)小題欲評量考生能否將溶液操作過程以矩陣表示。正確的解題步驟有二，步驟一先算出當溶液操作一輪後， a_1 與 b_1 的溶液中含有多少 a 與 b ，步驟二再將 $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$ 以 $\begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ 表示，求出 $\begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ 之值。考生若僅將 a_1 與 b_1 以 a, b 表示，而無法將 $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$ 以 $\begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ 表示者，皆僅能得到該小題的部分分數。此外，若考生直接寫出正確的 $\begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ 之值，而無任何演算過程或理由，則依據非選擇題之說明予以扣分，無法得到此小題的滿分，僅能得到部分分數。

在第(2)小題評量考生能否由 a_1 、 b_1 的值推得 a_{100} 、 b_{100} 之值。此題的解法有二，解法一是先求出 $a_1 = \frac{2}{3}$ 、 $b_1 = \frac{1}{3}$ 後，再由

$$\begin{bmatrix} a_{100} \\ b_{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{100} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{99} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{99} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{ 推得 } \begin{bmatrix} a_{100} \\ b_{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{。解}$$

法二，利用 $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (且 $x, y > 0, x + y = 1$)，求出當 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ 時，矩陣 $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$ 乘以 $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ 仍

為 $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ，故 $\begin{bmatrix} a_{100} \\ b_{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ 。但考生若直接寫出 $a_{100} = \frac{2}{3}$ 、 $b_{100} = \frac{1}{3}$ 之值，而無任何推論過程或理由者，

則無法得分。

第(3)小題欲評量在第二輪操作後 A 瓶溶液中有百分之多少的酒精，欲求酒精溶液百分比須先將 A 瓶中的酒精量算出後，再算出 A 瓶溶液中酒精所佔的比例為何，即可得到該小題的滿分。有

考生在算完 $\begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} \frac{11}{16} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{16} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$ 後，就直接將矩陣中的 $\frac{11}{16}$ ，當成 A 瓶溶液中的酒精濃度，而未寫

出 A 瓶中的酒精量，將無法得到此題分數，因酒精百分比濃度應為： $\frac{\text{溶質(酒精)}}{\text{溶液(A瓶溶液)}} \times 100\%$ ，並非酒精量即為此溶液的酒精百分比濃度。此外，考生在解題時若酒精百分比算錯，但有將酒精量指出，則可得到部分分數。

數學考科的題型有選擇、選填與非選擇題。選擇題與選填題，只要答案正確，即可得到全部分數。但非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌予扣分。如果只有答案對，但若解題觀念錯誤、過程不合理、或無完整推行過程，則無法得到分數¹。另外，指考數學乙非選擇題考生作答情形分析，主要用意在於提供老師教學或學生平常練習時的參考，並非僅僅說明評分標準，必須輔以考生的成績與可能犯的錯誤加以說明（請參考 2008 年 11 月 15 日選才 171 期）。

※附件

數學科試題的解法不只一種，故以下提供多數考生可能採用的解法，未列的解法，只要推論或解題過程正確，仍可得分。

參考解法（試題內容請見前文）

第一題

$$(1) \frac{(5+2 \times 20)}{20} = \frac{45}{20}$$

(2) 解法一

$$\text{設 } g(x) = ax^2 + bx + c$$

$$\text{依題意得 } \begin{cases} 25a + 5b + c = 37.5 \\ 100a + 10b + c = 70 \\ 225a + 15b + c = 97.5 \end{cases}$$

$$\text{解得 } a = -\frac{1}{10}, b = 8, c = 0, \text{ 故 } g(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 8x$$

解法二

由於當訂單為 0 時，報價應該為 0，故對於 $x > 0$ ， $\frac{g(x)}{x}$ 為線型函數，再利用所給數據可解

$$\text{得 } g(x) = x(7.5 - 0.1(x - 5))$$

$$(3) h(x) = g(x) - f(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 8x - (5 + 2x) = -\frac{1}{10}(x - 30)^2 + 85$$

故當 $x = 30$ （或 30 千個、或 3 萬個）時獲利總值最高

第二題

$$(1) \because (a, b) \left[\begin{array}{c} \text{A瓶倒一半到B瓶} \\ \rightarrow \\ \left(\frac{1}{2}a, \frac{1}{2}a + b\right) \\ \rightarrow \\ \text{B瓶倒一半到A瓶} \end{array} \right] \left(\frac{1}{2}a + \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a + b\right), \frac{1}{2}\left(\frac{1}{2}a + b\right)\right)$$

$$\left(\text{或 } a_1 = \frac{a}{2} + \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + b\right) = \frac{3}{4}a + \frac{b}{2}; b_1 = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2} + b\right) = \frac{a}{4} + \frac{b}{2}\right)$$

$$\text{故 } A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}$$

¹ 吳家怡(民 93)，我的數學甲非選擇題得分了嗎。選才通訊，第 120 期。

(2) **解法一**

$$\therefore \begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix}^{100} \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix} \quad (\text{或 } a_{100} = 2/3, b_{100} = 1/3)$$

解法二

$$\text{滿足 } \begin{bmatrix} 3/4 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} \quad (\text{且 } x, y > 0, x + y = 1) \text{ 的解為 } \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\text{故矩陣 } \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \text{ 乘以 } \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix} \text{ 仍為 } \begin{bmatrix} 2 \\ 3 \\ 1 \\ 3 \end{bmatrix}, \text{ 得 } \begin{bmatrix} a_{100} \\ b_{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2/3 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

(3) **解法一**

$$A^2 = \begin{bmatrix} 11/16 & 5/8 \\ 5/16 & 3/8 \end{bmatrix}, \text{ 操作二輪後, A 瓶溶液中的酒精量為 } \frac{11}{16} \times \frac{2}{3} \quad (\text{或 } \frac{22}{48} \text{ 或 } \frac{11}{24} \text{ 或 } \frac{11}{16} a)$$

$$\text{因為 } a_2 = \frac{2}{3}, \text{ A 瓶的酒精比例為 } \frac{\frac{11}{16} \cdot \frac{2}{3}}{\frac{2}{3}} = \frac{11}{16} \quad (\text{或 } 68.75\%)$$

解法二

操作一輪，B 瓶有 50%酒精，A 瓶有 75%酒精。

操作兩輪後，B 瓶有 62.5%酒精

$$\text{A 瓶有 } \frac{75 + 62.5}{2} \% = 68.75\% \text{ 酒精。}$$