

## 97 指考數學乙非選擇題作答情形分析

編者按：97 指考非選擇題評分標準說明系列報導，以數學考科壓軸，為此系列報導畫下句點。本期邀請本中心數學考科兩位學科研究員撰文，提供數學甲、數學乙的非選擇題評分標準說明及考生作答情形分析，請關心高中教育的各界參考。

第一處 陳慧美

表一列出 93 至 97 年數學乙非選擇題得零分及滿分的考生人數及人數百分比。由表中可看出 97 年的零分人數百分比為 25%，可明顯看出較 96 年少，但由歷年來看，它並非是零分人數百分比最少的一年，95 年的零分人數百分比才是最低的一年；再由表中可知今年數學乙非選擇題得滿分的人數百分比為 9.1%，與 96 年相比增加許多，且由歷年來看，其滿分人數百分比算還滿高的，只較 93 年與 95 年的人數百分比略少一些。

表一、93 至 97 年數學乙非選擇題零分、滿分統計表

年度	零分		滿分	
	人數	百分比	人數	百分比
97	19,505	25%	7,214	9.1%
96	31,953	37%	2,203	3%
95	9,798	10%	9,709	10%
94	31,808	33%	773	0.8%
93	13,348	14%	9,087	9.2%

為了解數學乙考生可能的作答情形，我們從參與 97 年數學乙考生群中隨機抽樣了 561 名考生的答案卷進行分析。至於各題的正確解法，可詳見選才電子報第 168 期「我的數學科非選擇題得分了嗎？」

### 【第一題題目】

坐標平面上有兩條拋物線，第一條拋物線的頂點在  $(-4,0)$ ，焦點在  $(-4,4)$ ，第二條拋物線的頂點在  $(4,4)$ ，焦點在  $(4,0)$ ，求兩條拋物線的交點。(13 分)

試題統計值：

項目	平均得分〈得分率〉	標準差
統計值	3.95 〈30.38%〉	5.31

說明：

數學乙非選擇題中的第一題是評量兩拋物線的交點，考生對於此題的解法有下列兩種：

- (1) 能正確地寫出兩條拋物線方程式，即  $\begin{cases} (x+4)^2 = 16y \\ (x-4)^2 = -16(y-4) \end{cases}$ ，再解聯立方程組求得二

交點為(4,4)和(-4,0)即可得滿分。

- (2) 能正確敘述「第二條拋物線的頂點(4,4)為第一條拋物線上的一點」之理由；同理，「第一條拋物線的頂點(-4,0)亦為第二條拋物線上的一點」之理由，接著還需說明這兩條拋物線最多只有兩個交點，即可得滿分。

表二、數學乙非選擇題第一題作答情形統計

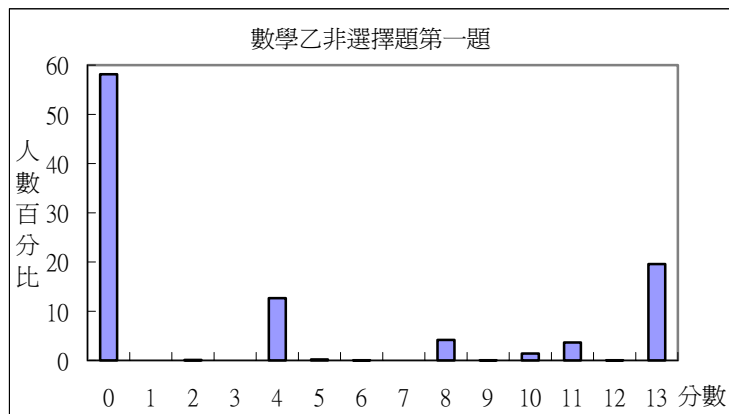
內容	份數	百分比
未答	125	22.2%
有寫一些跟答案無關的內容，可看出不知該如何作答。	32	5.7%
(法一) 利用拋物線方程式求解	345	61.6%
利用拋物線方程式求解，完全正確。	124	22.1%
未能寫出兩條正確拋物線方程式 $\begin{cases} (x+4)^2 = 16y \\ (x-4)^2 = -16(y-4) \end{cases}$ ，或 $\begin{cases} \sqrt{(x+4)^2 + (y-4)^2} =  y+4  \\ \sqrt{(x-4)^2 + y^2} =  y-8  \end{cases}$	94	16.8%
只能正確寫出某一條拋物線方程式	83	14.8%
未寫出兩條正確拋物線方程式，但寫出二條準線 $\begin{cases} y = -4 \\ y = 8 \end{cases}$	1	0.2%
欲利用拋物線方程式求解，有求得 $x = \pm 4$ 或 $y = 0, 4$ ，但無法將其配對成(4,4)和(-4,0)。	2	0.4%
欲利用拋物線方程式求解，但無法解出二點(4,4)和(-4,0)	41	7.3%

(法二) 利用圖形法求解	59	10.6%
利用圖形法完全正確，意即在圖形上說明第一拋物線的正焦弦長與(4,4)的關係，與第二條拋物線的正焦弦長與(-4,0)的關係。	0	0%
畫出圖形後，即說明兩交點為(4,4)與(-4,0)。	8	1.4%
畫出圖形後，有提及正焦弦長為16，但未說明正焦弦長與兩交點間的關係。	2	0.4%
圖形的開口方向不對	11	2.0%
圖形畫錯，以致答案錯誤	38	6.8%
其他	1	0.2%

表二是從 97 年數學乙考生群中，抽樣 561 名考生的答案卷進行分析，表中可看出二成多的考生連下筆作答都不願意就直接放棄；另有 5.7% 的考生則寫一些與答案無關的內容，但可看出不知該如何作答。抽樣中有 22.1% 的考生能完全作對，且是以拋物線方程式來求交點，較少看到考生能正確畫出兩條拋物線圖形後，可正確說明出為何交點為(4,4)與(-4,0)。

關於法一的部分，知道要利用拋物線方程式求解的考生比例約為 61.6%，但只有 22.1% 的考生能完全作對。首先，在寫出兩拋物線方程式部份，有 16.8% 的考生未能寫出兩條正確拋物線方程式，如：寫成  $(x+4)^2 + y^2 = 0$  與  $(x-4)^2 + (y-4)^2 = 0$ ，因此無法得分；又有 14.8% 的考生僅正確列出其中一條拋物線方程式，其中較多考生寫錯第二條拋物線，多數考生寫成  $(x+4)^2 = 16y$  或  $(x-4)^2 = 16(y-4)$ ，考生可能是因為粗心或觀念不清楚而寫錯。由此可知，有 31.8% 的考生無法由題幹的敘述寫出兩條正確拋物線方程式，因此建議高中教師在教授拋物線單元時，可加強此部分的練習。但更為可惜的是，有 7.3% 的考生可列出二條正確的拋物線方程式，但卻無法解出交點，及另有 0.4% 的考生好不容易求得  $x = \pm 4$  或  $y = 0, 4$ ，但無法將其配對成(4,4)和(-4,0)，因而無法得滿分。

關於法二部份，利用圖形法求解的考生有 10.6%，在抽樣卷中發現有 1.4% 的考生可正確畫出兩拋物線的圖形，但未說明這兩條拋物線的交點為(4,4)和(-4,0)的理由，且從圖形中的數據亦無法看出(4,4)在第一條拋物線的理由，因而無法拿到分數。另有 0.4% 的考生只提及正焦弦長為 16，但卻未進一步說明正焦弦長與點(4,4)之關聯性，亦無法得分。另外，在抽樣時發現考生在圖形的描繪上有些問題，如：有 8.8% 的考生無法正確繪出正確圖形，其中 2% 的考生其圖形的開口方向不對，另有 6.8% 的考生則將圖形畫成只有一個交點或無交點的情形，可知考生對圖形的描繪並不是相當理想。至於在其他作法中，有考生會直接假設第一條拋物線為  $ax^2 + by + c = 0$ ，第二條拋物線為  $dx^2 + ey + f = 0$ ，但經計算後亦無法求得交點。



圖一、數學乙第一題的考生成績分布圖

圖一為數學乙全體考生於非選擇題第一題的成績分布圖。其中以 0、4、8、11、13 分的考生居多，可將各分數所對應的考生群區分如下：

得 0 分者：未答、不知如何下手作答。或利用兩拋物線方程式求解，卻無法寫出二條正確拋物線方程式。或利用圖形法作答，但卻無任何說明兩拋物線的交點為  $(4, 4)$  與  $(-4, 0)$ 。

得 4 分者：只能正確寫出某一條拋物線方程式。

得 8 分者：可以正確寫出二條正確拋物線方程式。

得 11 分者：只解出一個交點，或求得  $x = \pm 4$  或  $y = 0, 4$ ，但無法將其配對成  $(4, 4)$  和  $(-4, 0)$ 。

得 13 分者：能正確推論求得答案。

由以上敘述可知此題主要鑑別的考生能力群為 0、4、8、11、13 分。其中得零分的人約 58%，得 4 分的考生約 11%，得 8 分的考生約 4%，得 11 分的生約 4%，約有 20% 的考生能完全作對。

### 【第二題題目】

建築公司在房市熱絡時推出甲、乙兩型熱門預售屋。企劃部門的規劃如下：甲型屋每棟地價成本為 500 萬元，建築費用為 900 萬元，乙型屋每棟地價成本為 200 萬元，建築費用為 1500 萬元，公司在資金部分限制地價總成本上限為 3500 萬元，所有建築費用的上限為 1 億 2000 萬元；無論甲型或乙型售出，每棟獲利皆為 500 萬元，假設推出的預售屋皆可售出，請問推出甲、乙兩型預售屋各幾棟，公司才可得到最大利潤。(13 分)

試題統計值：

項目	平均得分 (得分率)	標準差
統計值	6.47 (49.77%)	5

說明：

數學乙非選擇題第二題主要是評量考生能否利用線性規劃原理解題。

本題的解題步驟如下：

- (1) 正確列出目標函數與不等式組，或在坐標平面上畫出正確的可行解區域。
- (2) 再利用以下兩種方法求出答案

(a) 頂點法

正確求出可行解區域的四個頂點，再代入目標函數中作比較，得到正確答案。

(b) 平行線法

畫出正確的可行解區域，再描述目標函數的斜率介於  $-\frac{5}{2}$  與  $-\frac{3}{5}$  之間，或在坐標平面上畫出  $500x + 500y = k$  之直線，平移後得到正確答案。

表三、數學乙非選擇題第二題作答情形統計

內容	份數	百分比
未答	97	17.2%
有寫一些跟答案無關的內容，可看出不知該如何作答。	21	3.7%
(1)不等式組與目標函數 未寫出不等式組 $\begin{cases} x \geq 0, y \geq 0 \\ 500x + 200y \leq 3500 \\ 900x + 1500y \leq 12000 \end{cases}$ ，或寫錯不等式組，或可行解區域標示錯誤。	43	7.7%
不等式中的大小於符號寫錯，例如：寫成 $\begin{cases} 500x + 200y < 3500 \\ 900x + 1500y < 12000 \end{cases}$ ；或 $\begin{cases} 500x + 200y > 3500 \\ 900x + 1500y > 12000 \end{cases}$ ；或 $\begin{cases} 500x + 200y = 3500 \\ 900x + 1500y = 12000 \end{cases}$ ，之後再解 $\begin{cases} 500x + 200y = 3500 \\ 900x + 1500y = 12000 \end{cases}$ 這二條直線，而得到 (5,5) 的答案。	63	11.2%
未寫出目標函數 $P(x, y) = 500x + 500y$ 或寫錯目標函數。	67	12.0%

(2) (法一) 利用頂點法求解	<b>225</b>	<b>40.1%</b>
利用頂點法求解，且完全做對。	89	15.9%
完全沒寫出可行解區域上的四個頂點：(0,0)、(7,0)、(0,8)、及(5,5)。	31	5.5%
欲寫出可行解區域的四個頂點，但寫錯頂點(5,5)這點。	23	4.1%
已解出可行解區域上的四個頂點，但沒有分別將(0,0)、(7,0)、(0,8)、(5,5)代入目標函數 $P(x,y)$ 中比大小。	81	14.4%
前面完全正確，但最後答案卻寫錯。	1	0.2%
(法二) 利用平行線法求解	<b>13</b>	<b>2.4%</b>
利用平行線法求解，且完全做對。	11	2.0%
在利用直線 $500x + 500y = k$ 掃動時，因直線畫錯（即斜率錯誤）而找到錯誤頂點。	2	0.4%
(法三) 利用窮舉法求解	<b>22</b>	<b>3.9%</b>
利用窮舉法，且完全正確。	1	0.2%
無法列出可行解區域內的所有整數點	21	3.7%
其他	10	1.8%

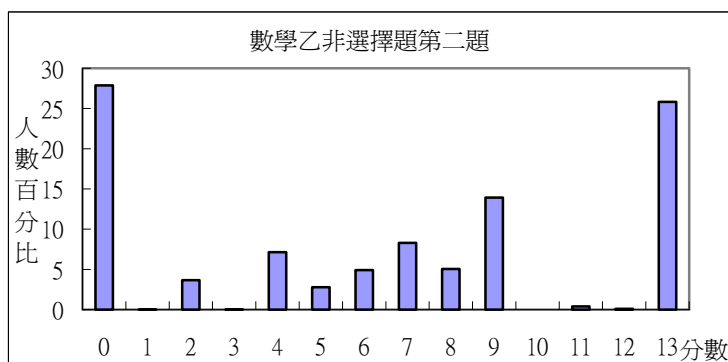
此題為線性規劃試題，自 91 年以來線性規劃試題已是第四次出現在數學乙非選擇題上，但由抽樣 561 名數學乙考生的答案卷進行分析可知（見表三），仍有 17.2% 的考生一個字都不願作答，直接放棄；另有 3.7% 的考生則是寫一些與答案無關的內容，但可看出不知該如何作答。由此可知，有約 20% 的考生對線性規劃試題仍採放棄態度。

在步驟一列出不等式組部份，有 7.7% 的考生未列出不等式組、或寫錯不等式組、或可行解區域標示錯誤。另有 11.2% 的考生則將不等式組的符號寫錯，如：寫成  $\begin{cases} 500x + 200y < 3500 \\ 900x + 1500y < 12000 \end{cases}$ ，但在計算過程中，又直接利用  $\begin{cases} 500x + 200y = 3500 \\ 900x + 1500y = 12000 \end{cases}$  求得(5,5)這答案，因此在受理考生複查時，最常接觸到的案件為：明明我的答案(5,5)正確，但我的非選擇題為何沒得滿分，甚至一分未得呢？原因是這類的考生一開始將情境問題轉換成數學式時，卻出現了錯誤的不等式組，又在過程中無法合理推論與計算，因此無法得分。

在目標函數部份，有 12% 的考生未寫出或寫錯了目標函數，因此無法說明甲、乙型預售屋各幾棟時，公司可得最大利潤。

當考生能正確寫出不等式組、或將可行解區域正確畫出後，其在步驟二中可利用「平行線法」求解。利用目標函數  $p(x,y) = 500x + 500y$  的斜率為  $-1$ ，當直線  $500x + 500y = k$  在坐標平面上平移時，可知當甲、乙兩型預售屋各為 5 棟時，公司可得到最大利潤；亦可利用頂點法求值，即求出可行解區域的頂點後，再分別代入目標函數內比大小，可以得出甲、乙型預售屋各為 5 棟時，公司可得最大利潤。從抽樣卷的分析結果知（見表七），較少考生（約 2.4%）是以平行線法的觀念求解，其中有 2.0% 的考生能完全作對，但有 0.4% 的考生因直線  $500x + 500y = k$  畫錯而得到錯誤的頂點，因而失去部分分數。

大部份考生（40.1%）是利用頂點法求解，但只有 15.9% 的考生能完全作對，其中常見的錯誤類型為：有 5.5% 的考生在使用頂點法求解時，完全沒寫出可行解區域的四個頂點，因此無法求得公司在售出幾棟時，可得最大利潤。另有 4.1% 的考生在寫出可行解區域頂點時，因粗心算錯頂點  $(5,5)$ ，而無法得到正確答案，實在可惜。但較為可惜的是有 14.4% 的考生已解出可行解區域的四個頂點，卻沒有將四個頂點代入比較，以致無法由答案卷上得知最大利潤所發生的點是如何得到的。



圖二、數學乙第二題的考生成績分布圖

圖二為數學乙全體考生非選擇題第二題成績分布圖。其中以 0、4、7、9、13 分的考生居多，可將各分數所對應的考生群區分如下：

得 0 分者：未答、或寫一些跟答案無關的內容、亦或目標函數與不等式組皆寫錯。

得 4 分者：可寫出不等式組，但未寫出目標函數；或寫出了目標函數，但不等式組並未完全正確。

得 7 分者：利用頂點法求解時，有部分頂點寫錯。

得 9 分者：在答題過程中沒有明確說明是依據何種概念判斷出最大利潤，即未將四個頂點代入比較，以致無法得知最大利潤所發生的點是如何得到的，因而無法得滿分。

得 13 分者：能正確推論求得答案。

由以上敘述可知此題區分了各能力的考生群，其中得零分的考生約有 28%，得 4 分的考生約有 7%，得 7 分的考生約有 10%，得 9 分的考生約有 15%，約 25% 的考生能完全作對。

今年數學乙的計算證明題並不困難，所用到的解題概念很基本，皆是課本中常見的概念，如：第一題是屬於拋物線的基本概念與計算，考生若能清楚拋物線方程式的基本定義，應不難寫出這兩條拋物線方程式；第二題線性規劃問題可說是數學乙非選擇題中的常客，相信對於平時常做歷屆試題的考生而言應是駕輕就熟。但從分析中可發現，第一題中有五成多的考生無法寫出一條正確的拋物線方程式，而在第二題中有二成多的考生在線性規劃問題中，仍無法寫出正確的不等式組、目標函數，可知考生對於數學基本觀念的瞭解與應用須再加強，因此建議考生在鑽研困難的數學問題前，應先確認自己對於一些基本定理或概念是否已清楚瞭解，以免應考時因觀念不清楚而無法得分。大考中心每年均會針對數學甲、數學乙的非選擇題答案卷進行抽樣，並進行作答類型分析，此舉是爲了想了解考生在解題過程中所使用的概念與想法，進而從中發現考生可能的迷思概念與錯誤類型，以提供給高中教師教學上的參考。此外，高中老師若對此分析結果有其教學上的其他看法，亦歡迎與我們分享。