

115 學年度分科測驗

數學乙考科非選擇題評分原則

數學乙考科的題型有選擇、選填與混合題（含非選擇題）。115 學年度分科測驗數學乙考科的非選擇題共有 4 題，包含第 14、15、17、18 題。其中第 14 題為 4 分；第 15、17、18 題為 6 分，總計 22 分。

非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理論證過程，答題時應清楚表達如何依據題設進行推論，並詳細說明解題過程，且得到正確答案，方可得到滿分。若能清楚表達如何依據正確題設進行推論，並詳細說明解題過程，但最後未求出正確答案，會依據解題概念的完整性，酌給部分分數。若未能依據正確題設進行推論，或未能詳細說明解題過程，則不予給分。例如沒有解題過程；或利用錯誤推論；或使用不符合題設的數據作答，均不給分。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。關於較詳細的考生解題錯誤概念或解法，請參見本中心將於 9 月 15 日出刊的第 352 期《選才電子報》。

115 學年度分科測驗數學乙考科非選擇題各題的滿分參考答案與評分原則說明如下：

第 14 題

一、滿分參考答案：

$$\text{根據題意， } A(x) = \frac{C(x) - C(0)}{x} = \frac{(x^3 - 12x^2 + 60x + 42) - 42}{x} = x^2 - 12x + 60。$$

$$\text{故 } \lim_{x \rightarrow 0^+} A(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2 - 12x + 60) = \lim_{x \rightarrow 0^+} (x^2) + \lim_{x \rightarrow 0^+} (-12x) + \lim_{x \rightarrow 0^+} (60) = 60。$$

二、評分原則：

滿分：以下兩項均須正確

(一) 根據題意，得出 $A(x) = x^2 - 12x + 60$ ，且過程正確。

(二) 得出 $\lim_{x \rightarrow 0^+} A(x) = 60$ ，且過程正確。

部分給分

以上解題過程部分正確。

零分

未作答或未符合部分給分原則。

第 15 題

一、滿分參考答案：

【解法一】

因為 $A(x) = x^2 - 12x + 60$ ，得 $A'(x) = 2x - 12$ ，解 $A'(x) = 0$ 得 $x = 6$ 。

因為 $A(x)$ 為二次多項式且首項係數為正，故 $y = A(x)$ 的圖形為凹向上。

故當 $x = 6$ 時，二次多項式函數 $A(x)$ 有最小值為 $A(6) = 24$ 。

即當藥廠產量為 6（公斤）時，函數 $A(x)$ 有最小值 24（萬元／公斤）。

【解法二】

因為 $A(x) = x^2 - 12x + 60$ ，利用配方法得 $A(x) = (x - 6)^2 + 24$ 。

故當 $x = 6$ 時，二次多項式函數 $A(x)$ 有最小值為 $A(6) = 24$ 。

即當藥廠產量為 6（公斤）時，函數 $A(x)$ 有最小值 24（萬元／公斤）。

二、評分原則：

滿分：以下兩項均須正確

（一）以正確理由，例如微分或配方法，說明當 $x = 6$ 時，函數 $A(x)$ 有最小值 24。

（二）得出當藥廠產量為 6（公斤）時，函數 $A(x)$ 有最小值 24（萬元／公斤）。

部分給分

以上解題過程部分正確。

零分

未作答或未符合部分給分原則。

第 17 題

一、滿分參考答案：

根據題意， $\overrightarrow{AB} = (4, 2) - (1, 1) = (3, 1)$ 。

由第 16 題知 $\overrightarrow{AC}$ 平行於 $(-2, 1)$ ，設 $\overrightarrow{AC} = t(-2, 1)$ ，

得 $\overrightarrow{AB} \cdot \overrightarrow{AC} = (3, 1) \cdot (-2t, t) = -6t + t = -5t$ 。

因為 C 位於第二象限且 A 點坐標為 $(1, 1)$ ，故 $t > 0$ ，因此 $\cos \angle BAC = \frac{-5t}{\sqrt{10} \times \sqrt{5}t} = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ 。

二、評分原則：

滿分：以下兩項均須正確

(一) 得出 $\overrightarrow{AB} = (3, 1)$ ，且過程正確。

(二) 得出 $\cos \angle BAC = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ ，且過程正確。

部分給分

以上解題過程部分正確。

零分

未作答或未符合部分給分原則。

第 18 題

一、滿分參考答案：

【解法一】

由第 17 題， $\overrightarrow{CB} = \overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB} = (2t, -t) + (3, 1) = (3 + 2t, 1 - t)$ 。

由內積定義知 $\cos \theta = \frac{\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{CB}}{|\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{CB}|} = \frac{(1, 2) \cdot (3 + 2t, 1 - t)}{\sqrt{5} \times \sqrt{(3 + 2t)^2 + (1 - t)^2}}$ ，

再由 $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ 得 $\frac{1}{\sqrt{10}} = \frac{5}{\sqrt{5} \times \sqrt{5t^2 + 10t + 10}}$ ，解得 $t = 2$ 或 -4 ，由 C 位於第二象限，得 $t = 2$ 。

推得 $\overrightarrow{CB} = (7, -1)$ ，故 $\overline{BC} = \sqrt{7^2 + (-1)^2} = 5\sqrt{2}$ 。

【解法二】

因為 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{CA}$ 垂直，故 $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{CB} = \overrightarrow{u} \cdot (\overrightarrow{CA} + \overrightarrow{AB}) = \overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{AB} = (1, 2) \cdot (3, 1) = 5$ 。

由 $\overrightarrow{u} \cdot \overrightarrow{CB} = |\overrightarrow{u}| \cdot |\overrightarrow{CB}| \cos \theta$ ，得 $5 = \sqrt{5} \cdot \overline{BC} \cdot \frac{1}{\sqrt{10}}$ ，故 $\overline{BC} = 5\sqrt{2}$ 。

【解法三】

設 $C(a,b)$ ，則 $\overrightarrow{AC} = (a-1, b-1)$ 、 $\overrightarrow{CB} = (4-a, 2-b)$ 。

由 $\overrightarrow{AC}$ 與 $\overrightarrow{u} = (1,2)$ 垂直，故 $(a-1, b-1) \cdot (1,2) = 0$ ，得 $a+2b=3$ 。

由 $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ ，得 $(1,2) \cdot (4-a, 2-b) = |\overrightarrow{u}| \times |\overrightarrow{CB}| \times \frac{1}{\sqrt{10}}$ ，即 $5 = \sqrt{5} \times \sqrt{5b^2+5} \times \frac{1}{\sqrt{10}}$ 。

解得 $b = \pm 3$ ，由 C 位於第二象限，得 $b=3$ ，推得 $C = (-3,3)$ ，

故 $\overline{BC} = \sqrt{(-3-4)^2 + (3-2)^2} = 5\sqrt{2}$ 。

【解法四】

由第 17 題得知 $\angle BAC$ 為鈍角，故 $\angle ACB$ 為銳角。

因為 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{CA}$ 垂直，且 θ 為銳角，故 $\angle ACB = \frac{\pi}{2} - \theta$ 。

因為 $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ ，得 $\sin \angle ACB = \frac{1}{\sqrt{10}}$ 。

由第 17 題得 $\sin \angle BAC = \frac{1}{\sqrt{2}}$ ，利用正弦定理 $\frac{\overline{AB}}{\sin \angle ACB} = \frac{\overline{BC}}{\sin \angle BAC}$ ，得 $\frac{\sqrt{10}}{\frac{1}{\sqrt{10}}} = \frac{\overline{BC}}{\frac{1}{\sqrt{2}}}$ ，

故 $\overline{BC} = 5\sqrt{2}$ 。

二、評分原則：

滿分：以下兩項均須正確

(一) 根據題意 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{CA}$ 垂直，得出正確的解題資訊。

(二) 根據題意 $\overrightarrow{u}$ 與 $\overrightarrow{CB}$ 的夾角為 θ ，且 $\cos \theta = \frac{1}{\sqrt{10}}$ ，結合(一)的解題資訊，得出

$\overline{BC} = 5\sqrt{2}$ ，且過程正確。

部分給分

以上解題過程部分正確。

零分

未作答或未符合部分給分原則。