

115 學年度分科測驗

數學甲考科非選擇題評分原則

數學甲考科的題型有選擇、選填與混合題（含非選擇題）、非選擇題。115 學年度分科測驗數學甲考科的非選擇題共有 5 題，包含第 12、13、14、16、17 題。其中第 12 題為 2 分；第 13、16 題為 4 分；第 14、17 題為 6 分，總計 22 分。

非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理論證過程，答題時應清楚表達如何依據題設進行推論，並詳細說明解題過程，且得到正確答案，方可得到滿分。若能清楚表達如何依據正確題設進行推論，並詳細說明解題過程，但最後未求出正確答案，會依據解題概念的完整性，酌給部分分數。若未能依據正確題設進行推論，或未能詳細說明解題過程，則不予給分。例如沒有解題過程；或利用錯誤推論；或使用不符合題設的數據作答，均不給分。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。關於較詳細的考生解題錯誤概念或解法，請參見本中心將於 9 月 15 日出刊的第 352 期《選才電子報》。

115 學年度分科測驗數學甲考科非選擇題各題的滿分參考答案與評分原則說明如下：

第 12 題

一、滿分參考答案：

由題意 $[q(x)]^2 = x \int_1^x p(t) dt$ 可得

$$q(0)^2 = 0 \times \int_1^0 p(t) dt = 0$$

$$q(1)^2 = 1 \times \int_1^1 p(t) dt = 0, \text{ 故得 } q(0) = q(1) = 0。$$

二、評分原則：

滿分

正確寫出 $q(0)^2 = 0 \times \int_1^0 p(t) dt = 0$ 且 $q(1)^2 = 1 \times \int_1^1 p(t) dt = 0$ ，故 $q(0) = q(1)$ 。

零分

未作答或未符合滿分給分原則，例如只寫出 $q(0) = 0$ 、 $q(1) = 0$ ，沒有過程；或只寫出 $q(0) = q(1)$ 。

第 13 題

一、滿分參考答案：

由 $q(x)$ 為首項係數為 1 的二次式，且由第 12 題得 $q(0) = q(1) = 0$ ，

推得 $q(x) = x(x-1) = x^2 - x$ 。

代入 $[q(x)]^2 = x \int_1^x p(t) dt$ ，得 $[x(x-1)]^2 = x \int_1^x p(t) dt$ ，

$$\text{故 } \int_1^x p(t) dt = \frac{[x(x-1)]^2}{x}，$$

由微積分基本定理，可得 $p(x) = \frac{d}{dx} [x(x-1)^2] = \frac{d}{dx} (x^3 - 2x^2 + x) = 3x^2 - 4x + 1$ 。

二、評分原則：

滿分

正確寫出 $q(x) = x^2 - x$ 。

由 $\int_1^x p(t) dt = x(x-1)^2 = x^3 - 2x^2 + x$ 微分得到 $p(x) = 3x^2 - 4x + 1$ 。

部分給分

以上解題過程部分正確，例如僅正確寫出 $q(x) = x^2 - x$ ，但求解 $p(x)$ 錯誤。

零分

未作答或未符合部份給分原則。

第 14 題

一、滿分參考答案：

設 $F(x) = \int_1^x [p(t) - q(t)] dt$ ，由第 12 題與 13 題

$$\text{得 } F(x) = \int_1^x (2t^2 - 3t + 1) dt = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x - \left(\frac{2}{3} - \frac{3}{2} + 1\right) = \frac{2}{3}x^3 - \frac{3}{2}x^2 + x - \frac{1}{6}$$

$F'(x) = 2x^2 - 3x + 1 = (2x-1)(x-1)$ ，解得 $F'(x) = 0$ 的根為 $\frac{1}{2}, 1$ 。

比較 $F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{2}{3} \times \left(\frac{1}{2}\right)^3 - \frac{3}{2} \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{24}$ 、 $F(1) = 0$ 、 $F(3) = \frac{2}{3} \times 3^3 - \frac{3}{2} \times 3^2 + 3 - \frac{1}{6} = \frac{22}{3}$ ，

得到最大值為 $\frac{22}{3}$ ，最小值為 0。

二、評分原則：

滿分

(一) 由 $p(x) - q(x) = (2x-1)(x-1)$ ，解得 $p(x) - q(x) = 0$ 的根為 $\frac{1}{2}, 1$ ，所以

$\int_1^x (p(t) - q(t)) dt$ 最大值或最小值可能發生在 $x = \frac{1}{2}, 1, 3$ 。

(二) 計算並比較 $\int_1^{\frac{1}{2}} (p(t) - q(t)) dt = \frac{1}{24}$ 、 $\int_1^1 (p(t) - q(t)) dt = 0$ 、 $\int_1^3 (p(t) - q(t)) dt = \frac{22}{3}$ ，得到最大值為 $\frac{22}{3}$ ，最小值為 0。

部分給分

以上解題過程部分正確，例如寫出 $\int_1^x (p(t) - q(t)) dt$ 最大值或最小值可能發生在

$x = \frac{1}{2}, 1, 3$ ，但計算 $\int_1^{\frac{1}{2}} (p(t) - q(t)) dt$ 、 $\int_1^1 (p(t) - q(t)) dt$ 、 $\int_1^3 (p(t) - q(t)) dt$ 的值時，並未完全正確。

零分

未作答或未符合部分給分原則。

第 16 題

一、滿分參考答案：

由 E_1 的法向量 $(1, 1, 2)$ 與 E_2 的法向量 $(2, -1, 1)$ ，作外積可得 L 的方向向量為 $(3, 3, -3)$ 。

另直線 L' ： $\begin{cases} x = 3 + t \\ y = -2 - t \\ z = 2 + 3t \end{cases}$ 的方向向量為 $(1, -1, 3)$ ，

將此兩直線的方向向量作外積可得 E_3 的法向量為 $(1, -2, -1)$ ，

又 E_3 過點 $(3, -2, 2)$ ，可得 E_3 的方程式為 $x - 2y - z = 5$ 。

二、評分原則：

滿分

寫出 E_3 的方程式為 $x - 2y - z = 5$ ，且過程正確。

部分給分

以上解題過程部分正確，例如求得 L 的方向向量為 $(3, 3, -3)$ ，但 E_3 的方程式寫錯。

零分

未作答或未符合部分給分原則。

第 17 題

一、滿分參考答案：

【解法一】

由題設 E 與 E_1, E_2, E_3 均垂直，可得 Γ 之內角為 E_1, E_2, E_3 任取兩面的一個兩面角。透過法向量內積計算兩面角的餘弦值為

$$E_1 \text{、} E_2 : \frac{(1,1,2) \cdot (2,-1,1)}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} ,$$

$$E_1 \text{、} E_3 : \frac{(1,1,2) \cdot (1,-2,-1)}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = -\frac{3}{6} = -\frac{1}{2} ,$$

$$E_2 \text{、} E_3 : \frac{(2,-1,1) \cdot (1,-2,-1)}{\sqrt{6} \times \sqrt{6}} = \frac{3}{6} = \frac{1}{2} .$$

可推得任一兩面角均為 60° 或 120° ，所以 Γ 之內角必均為 60° ，即 Γ 為正三角形。

在 L 上取點 $(1,1,0)$ ，計算點 $(1,1,0)$ 到 E_3 的距離為 $\sqrt{6}$ ，推得邊長為 $\sqrt{6} \times \frac{2}{\sqrt{3}} = 2\sqrt{2}$ 。

【解法二】

設平面 E 的方程式為 $x+y-z=k$ 。 E_1, E_2 的交線 L 與 E 的交點 (x,y,z) 滿足聯立方程

$$\begin{cases} x+y+2z=2 \\ 2x-y+z=1 \\ x+y-z=k \end{cases} \text{，解得交點為 } P\left(\frac{k+1}{3}, \frac{k+1}{3}, \frac{2-k}{3}\right) \text{。此交點為 } E \text{ 分別與 } E_1, E_2 \text{ 的交線之交點。}$$

同理 E 分別與 E_1, E_3 的交線之交點 (x,y,z) 滿足聯立方程
$$\begin{cases} x+y+2z=2 \\ x-2y-z=5 \\ x+y-z=k \end{cases} \text{，解得交點為}$$

$Q\left(\frac{k+7}{3}, \frac{k-5}{3}, \frac{2-k}{3}\right)$ 。又 E 分別與 E_2, E_3 的交線之交點 (x,y,z) 滿足聯立方程

$$\begin{cases} x-2y-z=5 \\ 2x-y+z=1 \\ x+y-z=k \end{cases} \text{，解得交點為 } R\left(\frac{k+1}{3}, \frac{k-5}{3}, \frac{-4-k}{3}\right) \text{。計算得 } \overline{PQ} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2} \text{、}$$

$\overline{PR} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ 且 $\overline{QR} = \sqrt{2^2 + 2^2} = 2\sqrt{2}$ ，故 PQR 形成邊長為 $2\sqrt{2}$ 的正三角形。

二、評分原則：

滿分

正確證明 Γ 為正三角形且正確求得 Γ 的邊長為 $2\sqrt{2}$ 。

部分給分

- (一) 僅正確證明 Γ 為正三角形。
- (二) 僅正確算出邊長。
- (三) 證明 Γ 為正三角形的理由不完整，例如未正確算出求解餘弦值的過程，或只寫出一般的餘弦值公式，未代入題設的值。

零分

未作答或未符合部分給分原則。