財團法人大學入學考試中心基金會
115學年度學科能力測驗試題
數學A考科

請於考試開始鈴響起，在答題卷簽名欄位以正楷簽全名

—作答注意事項—

考試時間：100分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正帶（液）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

  例：若答案格式是 $\dfrac{\text{(18-1)}}{\text{(18-2)}}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答題卷上的第 18-1 列的 $\overset{3}{\square}$ 與第 18-2 列的 $\overset{8}{\square}$ 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18-1	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
18-2	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

  例：若答案格式是 $\dfrac{\text{(19-1)}\text{(19-2)}}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列的 $\overset{-}{\square}$ 與第 19-2 列的 $\overset{7}{\square}$ 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
19-1	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
19-2	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\dfrac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

第壹部分、選擇（填）題（占85分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 6 題，每題 5 分。

1. 財神廟舉辦抽發財金活動：參加者抽兩次籤，每次抽籤出現「吉」、「祥」的機率皆為 $\frac{1}{3}$。如果兩次都抽得「吉」，獲得獎金 180 元；如果兩次都抽得「祥」，獲得獎金 90 元；其餘情況則無獎金。試問參加者可獲獎金的期望值為何？

   (1) 20 元　(2) 30 元　(3) 45 元　(4) 60 元　(5) 90 元

2. 對任一實數 a，令 $[a]$ 代表滿足 $[a] \le a < [a]+1$ 的整數，例如：$[3]=3$，$[3.1]=3$，$[-3.1]=-4$。關於函數 $f(x)=[\sqrt{99-x}]+[\sqrt{99+x}]$，其中 $-99 \le x \le 99$；試選出正確的選項。

   (1) $f(-20) \le f(0) < f(1)$
   (2) $f(-20) < f(1) \le f(0)$
   (3) $f(1) < f(-20) \le f(0)$
   (4) $f(0) < f(-20) \le f(1)$
   (5) $f(0) \le f(1) < f(-20)$

3. 設 $f(x)=a^x$，其中 a 為正實數。已知 c_1, c_2, c_3 是公差為 $\frac{10}{3}$ 的等差數列，且 $f(c_1), f(c_2), f(c_3)$ 是公比為 4 的等比數列。則等比數列 $f(10), f(8), f(6)$ 的公比為何？

   (1) $2^{\frac{-6}{5}}$　(2) $2^{\frac{-3}{5}}$　(3) $2^{\frac{3}{5}}$　(4) $2^{\frac{6}{5}}$　(5) $2^{\frac{5}{3}}$

4. 某網遊有 16 種材料，其中 6 種為基本材料，10 種為進階材料。任選 3 種不同材料可以合成出草藥、食物、藥水中的 1 類道具，其合成規則如下：若 3 種材料均為基本材料，則合成結果必為同一種草藥；若 3 種材料中 2 種為基本材料、1 種為進階材料，則合成結果會根據不同的進階材料得到不同種的食物，但不會受到基本材料不同而改變；其他的組合都會合成出不同種的藥水。試問此網遊總共可合成出多少種道具？

   (1) 256　(2) 370　(3) 401　(4) 455　(5) 560

5. 已知實數三階方陣 A 滿足 $A\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}0\\-1\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1\\1\\0\end{bmatrix}$，$A\begin{bmatrix}1\\0\\-1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}0\\0\\0\end{bmatrix}$。試問有多少個行向量 $\overrightarrow{v}=\begin{bmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{bmatrix}$ 滿足 $A\overrightarrow{v}=\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}$ 且 $\overrightarrow{v}$ 垂直於行向量 $\begin{bmatrix}0\\1\\0\end{bmatrix}$？

(1) 1 個　(2) 2 個　(3) 3 個　(4) 0 個　(5) 無窮多個

6. 坐標平面上有 $A(2,-2),B(-1,2)$ 兩點，試問直線 $y=-6$ 上有多少個點 C 使得 ΔABC 為等腰三角形？

(1) 1　(2) 2　(3) 3　(4) 4　(5) 5

二、多選題（占 30 分）

說明：第 7 題至第 12 題，每題 5 分。

7. 坐標平面上同時滿足 $\begin{cases}2x-y-3>0\\x+2y+1<0\end{cases}$ 的點 $P(x,y)$ 可能位在下列哪些選項？

(1) 第一象限
(2) 第二象限
(3) 第三象限
(4) 第四象限
(5) x 軸

8. 已知 $A=\begin{bmatrix}2&1\\1&0\end{bmatrix}$，且對所有正整數 $n\geq 2$，令 $A^n=\begin{bmatrix}a_n&b_n\\c_n&d_n\end{bmatrix}$。試選出正確的選項。

(1) $b_2<c_2$
(2) $A^2=2A+\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix}$
(3) $c_{n+2}=c_{n+1}+2c_n$
(4) $\begin{bmatrix}a_n&b_n\\c_n&d_n\end{bmatrix}\begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}b_{n+1}\\d_{n+1}\end{bmatrix}$
(5) $d_{2n}-a_{2n}=(d_n)^2-(a_n)^2$

9. T 分數為評量成績的一種方式，其計算方式如下：設全班平均成績為 μ 且標準差為 σ。若某生原始成績為 S，則他該科之 T 分數為 $T=50+10\left(\dfrac{S-\mu}{\sigma}\right)$。已知某班期末數學和英文兩科的平均成績皆為 60，數學成績的標準差為 12，英文成績的標準差為 8。試選出正確的選項。
(1) 若甲生英文的原始成績為 52，則其 T 分數為 40
(2) 各生數學的 T 分數不會超過其原始成績
(3) 若乙生兩科的原始成績平均比丙生兩科的原始成績平均高，則乙生兩科的 T 分數平均比丙生兩科的 T 分數平均高
(4) 若該班級兩科的及格標準均為 T 分數大於或等於 40，則數學及格的原始成績比英文及格的原始成績低
(5) 該班原始成績數學對英文的迴歸直線（即最適直線）之斜率與該班 T 分數數學對英文的迴歸直線之斜率相同

10. 已知四邊形 $ABCD$ 中，$\overline{AB}$ 平行 $\overline{DC}$，$\overline{AC}$ 與 $\overline{BD}$ 交於 E。若 $\overrightarrow{AB}=(2,-6),\overrightarrow{AD}=(1,5)$ 且 ΔABE 面積為 3。試選出正確的選項。
(1) $\cos\angle BAD=\dfrac{-7\sqrt{65}}{65}$
(2) ΔABD 面積為 9
(3) $\overrightarrow{AE}=(\dfrac{3}{2},\dfrac{1}{2})$
(4) 四邊形 $ABCD$ 面積為 $\dfrac{65}{3}$
(5) $\overline{BC}<\dfrac{8}{3}$

11. 令 Γ 為坐標平面上 $y=\cos(\frac{\pi}{2}x)$ 的圖形。對任一實數 $m\neq 0$，以 L_m 表示直線 $y=mx+1$。

試選出正確的選項。

(1) $m>0$ 時，L_m 和 Γ 交點的 x 坐標皆為負

(2) 若 (a,b) 為 L_m 和 Γ 的交點，則 $(-a,b)$ 為 L_{-m} 和 Γ 的交點

(3) 可以找到一實數 $m\neq 0$ 使得 L_m 和 Γ 交於點 $(\frac{20}{3},\frac{1}{2})$

(4) 若 L_m 與 Γ 有一交點在直線 $y=-1$ 上，則 $\frac{1}{m}$ 是奇數

(5) 若 L_m 與 Γ 有一交點在 x 軸上，則 L_m 與 Γ 有偶數個交點

12. 令 $f(x)$、$g(x)$ 為實係數三次多項式且 $f(x)$ 的首項係數為 1，已知 $f(x)-g(x)=2x^3+2x$。

令 Γ_1 和 Γ_2 分別為 $f(x)$ 和 $g(x)$ 在坐標平面上的函數圖形，其對稱中心分別為 $(a_1,b_1),(a_2,b_2)$。

試選出正確的選項。

(1) Γ_1 和 Γ_2 恰交於三點

(2) a_1+a_2 可唯一確定

(3) b_1+b_2 可唯一確定

(4) 若 $a_1=a_2$，則 $b_1=b_2$

(5) 若 $b_1=b_2$，則 $a_1=a_2$

三、選填題（占 25 分）

說明：第 13 題至第 17 題，每題 5 分。

13. 某高中聘用的全體教師$\frac{1}{4}$只有學士學位，$\frac{3}{4}$有碩士學位。只有學士學位的教師中有$\frac{1}{5}$通過英聽檢定，有碩士學位的教師中有$\frac{3}{5}$通過英聽檢定。已知每位教師被抽到的機會相等，若隨機抽選一位通過英聽檢定的教師，則該教師有碩士學位的條件機率為 $\dfrac{\text{13-1}}{\text{13-2}\ \text{13-3}}$。（化為最簡分數）

14. 坐標平面上，向量(a,b)與直線$y=bx-1$垂直，則$a+b$的最大可能值為 $\dfrac{\text{14-1}}{\text{14-2}}$。（化為最簡分數）

15. 已知三正數a,b,c成一等差數列，其中$a<b<c$，且坐標平面上三點$(a,\log 3a)$、$(b,\log 4b)$、$(c,\log 6c)$在同一直線上，則$\frac{b}{a}$之值為 $\dfrac{\text{15-1}}{\text{15-2}}$。（化為最簡分數）

16. 坐標平面上，已知二次函數圖形$\Gamma: y=f(x)$的頂點P在直線$y=1+2x$上，且交x軸於點$A(-\frac{1}{2},0),B(\frac{1}{2},0)$。將$\Gamma$平移使得平移後圖形的頂點$Q$仍在直線$y=1+2x$上，且亦通過點$B(\frac{1}{2},0)$，此時$P$、$Q$為兩相異點，則$\overline{PQ}=\dfrac{\text{16-1}\sqrt{\text{16-2}}}{\text{16-3}}$。（化為最簡根式）

17. 直角 ΔABC 中， $\angle CAB$ 為直角， $\overline{AB}$ 邊上一點 D ，滿足 $\angle BCD = 2\angle ACD$ ，且 $\overline{BC} = 2\overline{BD}$ 。

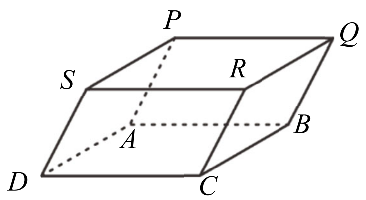
若 $\overrightarrow{AD} = k\overrightarrow{AB}$ ，則 $k = \dfrac{\text{17-1}}{\underline{\text{17-2}\ \text{17-3}}}$ 。（化為最簡分數）

第貳部分、混合題或非選擇題（占 **15** 分）

說明：本部分共有 1 題組，單選題每題 3 分，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。
選擇（填）題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

18-20 題為題組

坐標空間中有一平行六面體 $PQRS-ABCD$ ，如圖所示。



已知 $\overrightarrow{AB}\times\overrightarrow{AD} = (-5,5,5)$ 、 $\overrightarrow{AD}\times\overrightarrow{AP} = (-2,0,-4)$ 、

$\overrightarrow{AP}\times\overrightarrow{AB} = (6,-10,-8)$ ， $\overline{AP} = 6$ 。試回答下列問題。

18. 試問平行四邊形 $ABCD$ 的面積為何？（單選題，3 分）
(1) $2\sqrt{5}$ (2) $5\sqrt{2}$ (3) $5\sqrt{3}$ (4) $6\sqrt{3}$ (5) $10\sqrt{2}$

19. 設 B 點坐標為 $(1,2,0)$ ，試求平面 $ABCD$ 的平面方程式。（非選擇題，4 分）

20. 試求平行六面體的體積，並求平行六面體上（含邊界）距點 A 的最長距離。（非選擇題，8 分）

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{n(2a+(n-1)d)}{2}$

   首項為 a，公比為 $r\,(r\neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 三角函數的和角公式：$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

   $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

   $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

3. ΔABC 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$（$R$ 為 ΔABC 外接圓半徑）

   ΔABC 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

4. 一維數據 $X: x_1, x_2, \cdots, x_n$，

   算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}(x_1+x_2+\cdots+x_n)$

   標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}[(x_1-\mu_X)^2+(x_2-\mu_X)^2+\cdots+(x_n-\mu_X)^2]}=\sqrt{\dfrac{1}{n}[(x_1{}^2+x_2{}^2+\cdots+x_n{}^2)-n\mu_X{}^2]}$

5. 二維數據 $(X,Y):(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，

   相關係數 $r_{X,Y}=\dfrac{(x_1-\mu_X)(y_1-\mu_Y)+(x_2-\mu_X)(y_2-\mu_Y)+\cdots+(x_n-\mu_X)(y_n-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

   迴歸直線（最適合直線）方程式 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

6. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$, $\sqrt{3}\approx 1.732$, $\sqrt{5}\approx 2.236$, $\sqrt{6}\approx 2.449$, $\pi\approx 3.142$

7. 對數值：$\log 2\approx 0.3010,\ \log 3\approx 0.4771,\ \log 5\approx 0.6990,\ \log 7\approx 0.8451$