財團法人大學入學考試中心基金會

114學年度分科測驗試題

數學甲考科

請於考試開始鈴響起，在答題卷簽名欄位以正楷簽全名

—作答注意事項—

考試時間：80分鐘

作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正帶（液）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是 $\dfrac{\text{(18-1)}}{\text{(18-2)}}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答題卷上的第 18-1 列的 $\underset{\square}{3}$ 與第 18-2 列的 $\underset{\square}{8}$ 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
18-1	□	□	■	□	□	□	□	□	□	□	□	□
18-2	□	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□

例：若答案格式是 $\dfrac{\text{(19-1)(19-2)}}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列的 $\underset{\square}{-}$ 與第 19-2 列的 $\underset{\square}{7}$ 劃記，如：

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	−	±
19-1	□	□	□	□	□	□	□	□	□	□	■	□
19-2	□	□	□	□	□	□	■	□	□	□	□	□

選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\dfrac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

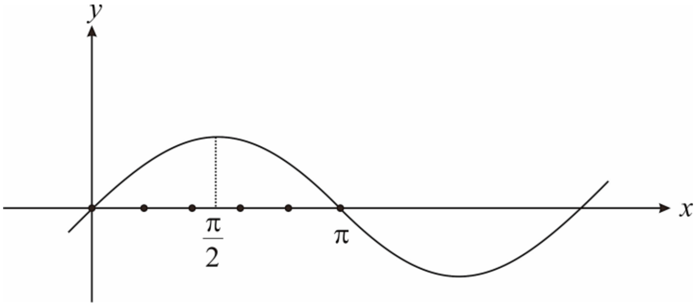
請記得在答題卷簽名欄位以正楷簽全名

第壹部分、選擇（填）題（占76分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題 6 分。

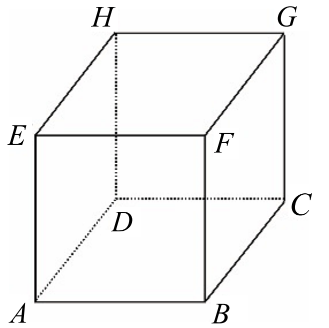
1. 坐標平面上，函數 $y=\sin x$ 的圖形對稱於 $x=\frac{\pi}{2}$，如圖所示。試選出在 $0<\theta\le\pi$ 的範圍中滿足 $\sin\theta=\sin(\theta+\frac{\pi}{5})$ 的 θ 值。



(1) $\frac{\pi}{5}$　(2) $\frac{2\pi}{5}$　(3) $\frac{3\pi}{5}$　(4) $\frac{4\pi}{5}$　(5) π

2. 空間中一正立方體 $ABCD-EFGH$，其中頂點 A、B、C、D 在同一個平面上，且 $\overline{AE}$ 為其中一個邊，如圖所示。下列選項中，試選出與平面 BGH 以及平面 CFE 皆垂直的平面。

(1) 平面 ADH
(2) 平面 BCD
(3) 平面 CDG
(4) 平面 DFG
(5) 平面 DFH



3. 《幾何原本》上說：「給定相異兩點可決定一條直線」。一般來說，相異三點可決定 $C_2^3=3$ 條直線；但若這三點共線，此時僅決定一條直線。坐標平面上，已知圓 Γ_1： $x^2+y^2=4$ 與兩坐標軸交於 4 點、圓 Γ_2： $x^2+y^2=2$ 與直線 $x-y=0$ 交於 2 點、圓 Γ_2 與直線 $x+y=0$ 交於 2 點。試問這 8 點共可決定幾條不同的直線？

(1) 12　(2) 16　(3) 20　(4) 24　(5) 28

二、多選題（占 40 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題 8 分。

4. 試從下列坐標平面上的二次曲線中，選出與所有的鉛直線都相交的選項。

(1) $\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

(2) $\frac{x^2}{9}-\frac{y^2}{4}=1$

(3) $-\frac{x^2}{9}+\frac{y^2}{4}=1$

(4) $y=\frac{4}{9}x^2$

(5) $x=\frac{4}{9}y^2$

5. 有一實數數列 $\langle a_n \rangle$，其中 $a_n=\cos(n\pi-\frac{\pi}{6})$，$n$為正整數。試選出正確的選項。

(1) $a_1=-\frac{1}{2}$

(2) $a_2=a_3$

(3) $a_4=a_{24}$

(4) $\langle a_n \rangle$為收斂數列，且 $\lim_{n\to\infty} a_n<1$

(5) $\sum_{n=1}^{\infty}(a_n)^n=3-2\sqrt{3}$

6. 設指數函數 $f(x)=1.2^x$。試選出正確的選項。

(1) $f(0)>0$

(2) $f(10)>10$

(3) 坐標平面上， $y=1.2^x$ 的圖形與直線 $y=x$ 相交

(4) 坐標平面上， $y=1.2^x$ 與 $y=\log(1.2^x)$ 的圖形對稱於直線 $y=x$

(5) 對任意正實數 b， $\log_{1.2} b\neq 1.2^b$

7. 已知實係數多項式 $f(x)$ 的次數大於 5，且其最高次項係數為正。
又 $f(x)$ 在 $x=1$、2、4 處有極小值，且在 $x=3$、5 處有極大值。
根據上述，試選出正確的選項。

(1) $f(1)<f(3)$

(2) 存在實數 a,b 滿足 $1<a<b<2$，使得 $f'(a)>0$ 且 $f'(b)<0$

(3) $f''(3)>0$

(4) 存在實數 $c>5$，使得 $f'(c)>0$

(5) $f(x)$ 的次數大於 7

8. 設複數 z 的虛部不為 0 且 $|z|=2$。已知在複數平面上，1、z、z^3 共線。試選出正確的選項。

(1) $z\cdot\overline{z}=2$

(2) $\dfrac{z^3-z}{z-1}$ 的虛部為 0

(3) z 的實部為 $-\dfrac{1}{2}$

(4) z 滿足 $z^2-z+4=0$

(5) 在複數平面上，-2、z、z^2 共線

三、選填題（占 18 分）

說明：第 9 題至第 11 題，每題 6 分。

9. 令 A 為以原點為中心逆時針旋轉 θ 角的旋轉矩陣，且令 B 為以 x 軸為鏡射軸（對稱軸）的鏡射矩陣。令 $A=\begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{bmatrix}$、$BA=\begin{bmatrix} c_1 & c_2 \\ c_3 & c_4 \end{bmatrix}$。

已知 $a_1+a_2+a_3+a_4=2(c_1+c_2+c_3+c_4)$，則 $\tan\theta=\dfrac{\text{(9-1)(9-2)}}{\text{(9-3)}}$。（化為最簡分數）

10. 坐標空間中一平面與平面 $x=0$、平面 $z=0$ 分別交於直線 L_1、L_2。已知 L_1、L_2 互相平行，且 L_1 通過點 $(0,2,-11)$、L_2 通過點 $(8,21,0)$，則 L_1、L_2 的距離為 $\sqrt{\text{(10-1)(10-2)(10-3)}}$。（化為最簡根式）

11. 坐標平面上有一平行四邊形 Γ，其中兩邊所在的直線與 $5x-y=0$ 平行、另兩邊所在的直線與 $3x-2y=0$ 垂直。令 Γ 的兩對角線交點為 Q。已知 Γ 有一頂點 P，滿足 $\overrightarrow{PQ}=(10,-1)$，則 Γ 的面積為 ＿11-1 11-2 11-3＿ 。

第貳部分、混合題或非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有 2 題組，選擇題每題 2 分，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。
選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

12-14 題為題組

某商店以抽獎方式販售一熱門公仔，每次抽獎都互相獨立且抽中的機率為 $\frac{2}{5}$。參加者可用以下兩種方式參加抽獎。

方式一：先付 225 元得到兩次抽獎機會，只要抽中即停止抽獎且得到一個公仔；若這兩次皆未抽中，則必須再多付 75 元得到一個公仔。

方式二：抽獎次數不限，每抽獎一次付 100 元。

根據上述，試回答下列問題。

12. 若以方式一抽獎，則共需付 300 元才能得到一個公仔的機率為何？（單選題，2 分）

(1) $\left(\frac{2}{5}\right)^2$　(2) $\left(\frac{2}{5}\right)^3$　(3) $\left(\frac{3}{5}\right)^2$

(4) $\left(\frac{3}{5}\right)^3$　(5) $\left(\frac{2}{5}\right)\times\left(\frac{3}{5}\right)^2$

13. 若以方式二抽獎直到抽中一個公仔為止，試依期望值定義，使用 Σ 符號表示所需抽獎**次數**的期望值，並求其值。（非選擇題，4 分）

14. 假設花費金額不設限直到得到一個公仔為止，試分別求出這兩種抽獎方式得到一個公仔所需付**金額**的期望值，並說明這兩個期望值的大小關係。（非選擇題，6 分）

15-17 題為題組

設實係數多項式函數 $f(x)=3ax^2+(1-a)$，其中 $-\frac{1}{2}\le a\le 1$。在坐標平面上，令 Γ 為 $y=f(x)$ 與 x 軸在 $-1\le x\le 1$ 所圍的區域。根據上述，試回答下列問題。

15. 證明當 $-1\le x\le 1$ 時，$f(x)\ge 0$ 皆成立。（非選擇題，4 分）

16. 證明對於所有 $a\in[-\frac{1}{2},1]$，Γ 的面積皆為 2。（非選擇題，2 分）

17. 令 V 為 Γ 繞 x 軸旋轉所得旋轉體的體積。試問對所有 $a\in[-\frac{1}{2},1]$，V 是否都相等？若相等，則求其值；若不相等，則當 a 為多少時，V 有最大值，並求此最大值。（非選擇題，6 分）

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{n(2a+(n-1)d)}{2}$

   首項為 a，公比為 r $(r\neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 級數和：$\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ； $\displaystyle\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3. 三角函數的和角公式：$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

   $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

   $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

4. ΔABC 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ （ R 為 ΔABC 外接圓半徑）

   ΔABC 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

5. 一維數據 $X:x_1,x_2,\cdots,x_n$，

   算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i$ ；標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n}(\displaystyle\sum_{i=1}^{n}x_i^{2}-n\mu_X^{2})}$

6. 二維數據 $(X,Y):(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，

   相關係數 $r_{X,Y}=\dfrac{\displaystyle\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

   最適直線（迴歸直線）方程式 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

7. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414$, $\sqrt{3}\approx 1.732$, $\sqrt{5}\approx 2.236$, $\sqrt{6}\approx 2.449$, $\pi\approx 3.142$

8. 對數值：$\log 2\approx 0.3010$, $\log 3\approx 0.4771$, $\log 5\approx 0.6990$, $\log 7\approx 0.8451$

9. 若 $X\sim B(n,p)$ 為二項分布，則期望值 $E(X)=np$ ，變異數 $Var(X)=np(1-p)$ ；

   若 $X\sim G(p)$ 為幾何分布，則期望值 $E(X)=\dfrac{1}{p}$ ，變異數 $Var(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$ 。