114 學年度學科能力測驗數學 A 考科
非選擇題滿分參考答案與評分原則

數學 A 考科的非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理論證過程，答題時應清楚表達如何依據題設進行推論，並詳細說明解題過程，且得到正確答案，方可得到滿分。若能清楚表達如何依據正確題設進行推論，並詳細說明解題過程，但最後未求出正確答案，會依據解題概念的完整性，酌給部分分數。若未能依據正確題設進行推論，或未能詳細說明解題過程，則不予給分。例如沒有解題過程；或利用錯誤推論；或使用不符合題設的數據作答，均不給分。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考，詳細評分原則說明與常見錯誤概念，請參閱本中心將於 4 月 15 日出刊的第 347 期《選才電子報》。114 學年度學科能力測驗數學 A 考科非選擇題各題的參考答案說明如下：

第 19 題

一、滿分參考答案：

依題意 $A^2=B^3=\begin{bmatrix}\cos 90° & -\sin 90° \\ \sin 90° & \cos 90°\end{bmatrix}$，所以依據題意 A 為旋轉 45°的旋轉矩陣，

即 $A=\begin{bmatrix}\cos 45° & -\sin 45° \\ \sin 45° & \cos 45°\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$；

而 B 為旋轉 30°的旋轉矩陣，即 $B=\begin{bmatrix}\cos 30° & -\sin 30° \\ \sin 30° & \cos 30°\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2}\end{bmatrix}$。

故 P 經 $A^3=\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}$ 變換，可利用矩陣乘法 $\begin{bmatrix}-\frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2} \\ \frac{\sqrt{2}}{2} & -\frac{\sqrt{2}}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1 \\ 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-\sqrt{2} \\ 0\end{bmatrix}$，得 Q 點坐標為 $(-\sqrt{2},0)$。

或依題意 A^3 為旋轉 135°矩陣，而 $\overrightarrow{OP}$ 長度為 $\sqrt{2}$ 且與 $(1,0)$ 夾角為 45°，故 $\overrightarrow{OQ}$ 長度為 $\sqrt{2}$ 且與 $(1,0)$ 夾角為 $45°+135°=180°$，因此得 Q 點坐標為 $(-\sqrt{2},0)$。

故 Q 經 $B^4=\begin{bmatrix}\frac{-1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}$ 變換，可利用矩陣乘法 $\begin{bmatrix}\frac{-1}{2} & -\frac{\sqrt{3}}{2}\\ \frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{-1}{2}\end{bmatrix}\begin{bmatrix}-\sqrt{2}\\ 0\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ -\frac{\sqrt{6}}{2}\end{bmatrix}$，得 R 點坐標為 $(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{6}}{2})$。

設 $\overrightarrow{OR}$ 與 $(1,0)$ 的夾角為 θ，利用內積 $\overrightarrow{OR}\cdot(1,0)=(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{6}}{2})\cdot(1,0)=\frac{\sqrt{2}}{2}$ 以及 $\overrightarrow{OR}$ 的長度為 $\sqrt{2}$，推得 θ 為 $60°$。也可由 B^4 為旋轉 $120°$ 矩陣，故 $\overrightarrow{OR}$ 的方向角為 $45°+135°+120°=300°$，因此 $\overrightarrow{OR}$ 與 $(1,0)$ 的夾角為 $60°$。

二、評分原則：

滿分：以下兩項均須正確

1.根據題意所給條件，得出 Q 點坐標為 $(-\sqrt{2},0)$，且過程正確。

2.根據題意所給條件，得出 $\overrightarrow{OR}$ 與 $(1,0)$ 的夾角為 $60°$。且過程正確。

部分給分

以上兩個的解題過程部分正確。

零分

未作答或未符合部份給分原則。

第 20 題

一、滿分參考答案：

因 R 點坐標為 $(\frac{\sqrt{2}}{2},-\frac{\sqrt{6}}{2})$，推得直線 OR 方程式為 $y=-\sqrt{3}x$。又 L 為過 $(1,1)$ 的水平線，故 L 方程式為 $y=1$，可得 S 點坐標為 $(-\frac{\sqrt{3}}{3},1)$，再由內積 $\overrightarrow{SO}\cdot(1,0)=(\frac{\sqrt{3}}{3},-1)\cdot(1,0)=\frac{\sqrt{3}}{3}$ 以及 $\overrightarrow{SO}$ 的長度為 $\frac{2\sqrt{3}}{3}$，推得 $\angle OSP=60°$。

也可設點 $D(1,0)$，由第 19 題知 $\angle ROD=60°$。因直線 L 與直線 OQ (即直線 OD)平行，可由同位角得出 $\angle OSP=60°$。

二、評分原則：

$\boxed{\text{滿分}}$：以下兩項均須正確

1.根據題意所給條件，得出 $\angle OSP = 60^\circ$，且過程正確。

2.根據題意所給條件，得出 S 點坐標為 $(-\frac{\sqrt{3}}{3},1)$，且過程正確。

$\boxed{\text{部分給分}}$

以上兩個的解題過程部分正確。

$\boxed{\text{零分}}$

未作答或未符合部份給分原則。