財團法人大學入學考試中心基金會

112學年度分科測驗試題

數學甲考科

請於考試開始鈴響起，在答題卷簽名欄位以正楷簽全名

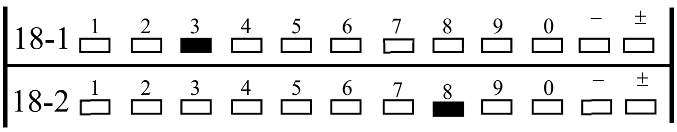
—作答注意事項—

考試時間：80分鐘

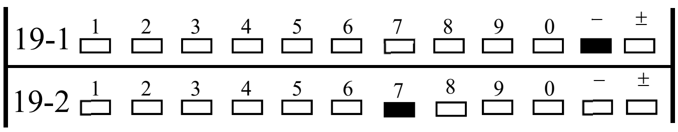
作答方式：

- 選擇（填）題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正帶（液）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響成績。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是 $\dfrac{18\text{-}1}{18\text{-}2}$，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$，則考生必須分別在答題卷上的第 18-1 列的 3 與第 18-2 列的 8 劃記，如：



例：若答案格式是 $\dfrac{(19\text{-}1)(19\text{-}2)}{50}$，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答題卷的第 19-1 列的 − 與第 19-2 列的 7 劃記，如：



選擇（填）題計分方式：

- 單選題：每題有 n 個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有 n 個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯 k 個選項者，得該題 $\dfrac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有 n 個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

第壹部分、選擇（填）題（占76分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題 6 分。

1. 坐標平面上，一質點由點 $(-3,-2)$ 出發，沿著向量 $(a,1)$ 的方向移動 5 單位長之後剛好抵達 x 軸，其中 a 為正實數。試問 a 值等於下列哪一個選項？

(1) $\frac{\sqrt{13}}{2}$　(2) 2　(3) $\sqrt{5}$　(4) $\frac{\sqrt{21}}{2}$　(5) $2\sqrt{6}$

2. 放射性物質的半衰期 T 定義為「每經過時間 T，該物質的質量會衰退成原來的一半」。鉛製容器中有 A、B 兩種放射性物質，其半衰期分別為 T_A、T_B。開始記錄時這兩種物質的質量相等，112 天後測量發現物質 B 的質量為物質 A 的質量的四分之一。根據上述，試問 T_A、T_B 滿足下列哪一個關係式？

(1) $-2+\frac{112}{T_A}=\frac{112}{T_B}$　(2) $2+\frac{112}{T_A}=\frac{112}{T_B}$　(3) $-2+\log_2\frac{112}{T_A}=\log_2\frac{112}{T_B}$

(4) $2+\log_2\frac{112}{T_A}=\log_2\frac{112}{T_B}$　(5) $2\log_2\frac{112}{T_A}=\log_2\frac{112}{T_B}$

3. 試問極限

$$\lim_{n\to\infty}\frac{3}{n^2}\left(\sqrt{4n^2+9\times1^2}+\sqrt{4n^2+9\times2^2}+\cdots+\sqrt{4n^2+9\times(n-1)^2}\right)$$

的值可用下列哪一個定積分表示？

(1) $\int_0^3\sqrt{1+x^2}\,dx$　(2) $\int_0^3\sqrt{1+9x^2}\,dx$　(3) $\int_0^3\sqrt{4+x^2}\,dx$

(4) $\int_0^3\sqrt{4+9x^2}\,dx$　(5) $\int_0^3\sqrt{4x^2+9}\,dx$

二、多選題（占 40 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題 8 分。

4. 設 a,b 為實數。已知四個數 $-3,-1,4,7$ 皆滿足 x 的不等式 $|x-a|\le b$，試選出正確的選項。

(1) $\sqrt{10}$ 也滿足 x 的不等式 $|x-a|\le b$

(2) $3,1,-4,-7$ 滿足 x 的不等式 $|x+a|\le b$

(3) $-\frac{3}{2},-\frac{1}{2},2,\frac{7}{2}$ 滿足 x 的不等式 $|x-a|\le \frac{b}{2}$

(4) b 可能等於 4

(5) a,b 可能相等

5. 考慮實係數多項式 $f(x)=x^4-4x^3-2x^2+ax+b$。已知方程式 $f(x)=0$ 有虛根 $1+2i$（其中 $i=\sqrt{-1}$），試選出正確的選項。

(1) $1-2i$ 也是 $f(x)=0$ 的根

(2) a,b 皆為正數

(3) $f'(2.1)<0$

(4) 函數 $y=f(x)$ 在 $x=1$ 有局部極小值

(5) $y=f(x)$ 圖形反曲點的 x 坐標皆大於 0

6. 設 a,b,c,d,r,s,t 皆為實數，已知坐標空間中三個非零向量 $\overrightarrow{u}=(a,b,0)$、$\overrightarrow{v}=(c,d,0)$ 及 $\overrightarrow{w}=(r,s,t)$ 滿足內積 $\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{w}\cdot\overrightarrow{v}=0$。考慮三階方陣 $A=\begin{bmatrix} a & b & 0 \\ c & d & 0 \\ r & s & t \end{bmatrix}$，試選出正確的選項。

(1) 若 $\overrightarrow{u}\cdot\overrightarrow{v}=0$，則行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$

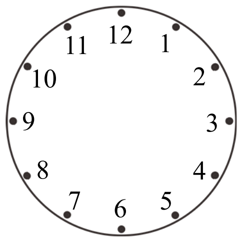
(2) 若 $t\neq 0$，則行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$

(3) 若存在一個向量 $\overrightarrow{w'}$ 滿足 $\overrightarrow{w'}\cdot\overrightarrow{u}=\overrightarrow{w'}\cdot\overrightarrow{v}=0$ 且外積 $\overrightarrow{w'}\times\overrightarrow{w}\neq\overrightarrow{0}$，則行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$

(4) 若對任意三個實數 e,f,g，向量 (e,f,g) 都可以表示成 $\overrightarrow{u},\overrightarrow{v},\overrightarrow{w}$ 的線性組合，則行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$

(5) 若行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}\neq 0$，則 A 的行列式不等於 0

7. 有一個依順時針方向依序標示 1,2,…,12 數字的圓形時鐘(如圖所示)。一開始在此時鐘「12」點鐘位置擺設一枚棋子，然後每次投擲一枚均勻銅板，依投擲結果，照以下規則移動這枚棋子的位置：



- 若出現正面，將棋子從當時位置依順時針方向移動 5 個鐘點。
- 若出現反面，將棋子從當時位置依逆時針方向移動 5 個鐘點。

例如：若投擲銅板三次均為正面，則棋子第一次移動到「5」點鐘位置、第二次移動到「10」點鐘位置，第三次移動到「3」點鐘位置。

對任一正整數 n，令隨機變數 X_n 代表依上述規則經過 n 次移動後棋子所在的點鐘位置，$P(X_n=k)$ 代表 $X_n=k$ 的機率(其中 $k=1,2,\ldots,12$)，且令 $E(X_n)$ 代表 X_n 的期望值。試選出正確的選項。

(1) $E(X_1)=6$

(2) $P(X_2=12)=\dfrac{1}{4}$

(3) $P(X_8=5)\geq\dfrac{1}{2^8}$

(4) $P(X_8=4)=P(X_8=8)$

(5) $E(X_8)\leq 7$

8. 複數平面上，設 $\bar{z}$ 代表複數 z 的共軛複數，且 $i=\sqrt{-1}$。試選出正確的選項。

(1) 若 $z=2i$，則 $z^3=4i\bar{z}$

(2) 若非零複數 α 滿足 $\alpha^3=4i\bar{\alpha}$，則 $|\alpha|=2$

(3) 若非零複數 α 滿足 $\alpha^3=4i\bar{\alpha}$ 且令 $\beta=i\alpha$，則 $\beta^3=4i\bar{\beta}$

(4) 滿足 $z^3=4i\bar{z}$ 的所有非零複數 z 中，其主輻角的最小可能值為 $\frac{\pi}{6}$

(5) 恰有 3 個相異非零複數 z 滿足 $z^3=4i\bar{z}$

三、選填題（占 18 分）

說明：第 9 題至第 11 題，每題 6 分。

9. 已知平面上直角 ΔABC 的三邊長 $\overline{AB}=\sqrt{7}$、$\overline{AC}=\sqrt{3}$、$\overline{BC}=2$。若分別以 $\overline{AB}$ 與 $\overline{AC}$ 為底邊在 ΔABC 的外部作頂角等於 $120°$ 的等腰三角形 ΔMAB 與 ΔNAC，

則 $\overline{MN}^2=\dfrac{\text{(9-1)(9-2)}}{\text{(9-3)}}$。（化為最簡分數）

10. 坐標空間中有方向向量為 $(1,-2,2)$ 的直線 L、平面 $E_1:2x+3y+6z=10$ 與平面 $E_2:2x+3y+6z=-4$。則 L 被 E_1、E_2 所截線段的長度為 $\dfrac{\text{(10-1)(10-2)}}{\text{(10-3)}}$。（化為最簡分數）

11. 百貨公司舉辦父親節抽牌送獎品活動，規則如下：主辦單位準備編號 1、2、...、9 的牌卡十張，其中編號 8 的牌卡有兩張，其他編號的牌卡均只有一張。從這十張牌隨機抽出四張，且抽出不放回，依抽出順序由左至右排列成一個四位數。若排成的四位數滿足下列任一個條件，就可獲得獎品：

(1) 此四位數大於 6400

(2) 此四位數含有兩個數字 8

例如：若抽出四張牌編號依序為 5、8、2、8，則此四位數為 5828，可獲得獎品。

依上述規則，共有 (11-1)(11-2)(11-3)(11-4) 個抽出排成的四位數可獲得獎品。

第貳部分、混合題或非選擇題（占 **24** 分）

說明：本部分共有 2 題組，選填題每題 2 分，非選擇題配分標於題末。限在答題卷標示題號的作答區內作答。選擇（填）題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時以橡皮擦擦拭，切勿使用修正帶（液）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

12-14 題為題組

設 a,b 為實數，並設 O 為坐標平面的原點。已知二次函數 $f(x)=ax^2$ 的圖形與圓 $\Omega: x^2+y^2-3y+b=0$ 皆通過點 $P\left(1,\frac{1}{2}\right)$，並令點 C 為 Ω 的圓心。根據上述，試回答下列問題。

12. 試求向量 $\overrightarrow{CO}$ 與 $\overrightarrow{CP}$ 夾角的餘弦值。（非選擇題，2 分）

13. 試證明 $y=f(x)$ 圖形與 Ω 在 P 點有共同的切線。（非選擇題，4 分）

14. 試求 $y=f(x)$ 圖形上方與 Ω 下半圓弧所圍區域的面積。（非選擇題，6 分）

15-17 題為題組

坐標平面上，設 Γ 為中心在原點且長軸落在 y 軸上的橢圓。已知對原點逆時針旋轉 θ 角（其中 $0<\theta<\pi$）的線性變換將 Γ 變換到新橢圓 $\Gamma':40x^2+4\sqrt{5}xy+41y^2=180$，點 $\left(-\frac{5}{3},\frac{2\sqrt{5}}{3}\right)$ 為 Γ' 上離原點最遠的兩點之一。根據上述，試回答下列問題。

15. 橢圓 Γ' 的長軸長為 $\underline{⑮\text{-}1\sqrt{⑮\text{-}2}}$。（化為最簡根式）（選填題，2 分）

16. 試求 Γ' 短軸所在的直線方程式與短軸長。（非選擇題，4 分）

17. 已知在 Γ 上的一點 P 經由此旋轉後得到的點 P' 落在 x 軸上，且 P' 點的 x 坐標大於 0。試求 P 點的坐標。（非選擇題，6 分）

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{n(2a+(n-1)d)}{2}$

   首項為 a，公比為 r $(r\neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 級數和：$\sum_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$；$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3. 三角函數的和角公式：$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

   $\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$

   $\tan(A+B)=\dfrac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$

4. ΔABC 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$（$R$為 ΔABC 外接圓半徑）

   ΔABC 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

5. 一維數據 $X:x_1,x_2,\cdots,x_n$，

   算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$；標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-n\mu_X^{\,2})}$

6. 二維數據 $(X,Y):(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，

   相關係數 $r_{X,Y}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

   最適直線（迴歸直線）方程式 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

7. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414,\sqrt{3}\approx 1.732,\sqrt{5}\approx 2.236,\sqrt{6}\approx 2.449,\pi\approx 3.142$

   $\sin 23^\circ\approx 0.40$，$\sin 37^\circ\approx 0.60$，$\sin 53^\circ\approx 0.80$，$\cos 23^\circ\approx 0.92$，$\cos 37^\circ\approx 0.80$，$\cos 53^\circ\approx 0.60$

8. 對數值：$\log 2\approx 0.3010$，$\log 3\approx 0.4771$，$\log 5\approx 0.6990$，$\log 7\approx 0.8451$

9. 若 $X\sim B(n,p)$ 為二項分布，則期望值 $E(X)=np$，變異數 $Var(X)=np(1-p)$；

   若 $X\sim G(p)$ 為幾何分布，則期望值 $E(X)=\dfrac{1}{p}$，變異數 $Var(X)=\dfrac{1-p}{p^2}$。