

111 學測數學 A 考科試題或答案之反映意見回覆

題號：1

題目：

1. 某冰淇淋店最少需準備 n 桶不同口味的冰淇淋，才能滿足廣告所稱「任選兩球不同口味冰淇淋的組合數超過 100 種」。試問來店顧客從 n 桶中任選兩球（可為同一口味）共有幾種方法？

- (1) 101 (2) 105 (3) 115 (4) 120 (5) 225

意見內容：

1. 本題第 5 選項 225 應亦為正確答案，理由如下：本題最後一句問共有幾種「方法數」和前句不同口味的「組合數」顯然不同。在翰林版高中數學 2（民國 108 年 9 月初版）第 188 頁第 2 行「從 n 個不同的物品中挑出 k 個不同物品的組合數」，可知「方法數」多半用在指排列的情況。因此，本題的用語「方法數」應指「排列數」。（若指組合，多半會直接用「組合數」表示，如本題第一句。）以日常生活買冰淇淋的經驗，通常是先點一球，店員就裝一球，再點第二球，因此店員放置冰淇淋的順序會有差異，兩球會有先點/後點，及先放（在下層）/後放（在上層）的不同，應列入方法數的計算。因此考生若正確運用組合的概念算出 15 桶，再以 $15 \times 15 = 225$ 計算買兩球，表示已充分掌握組合概念，不應因題目語意不清而扣分。故第 5 選項應開放給分。

2. (4)120 及(5)225 都是正確答案。

(1) 從該題前半段可算出 $n = 15$ ，此部分無疑義。

(2) 但後半段「從 n 桶中任選兩球」則日常生活中有兩種作法：

(A) 若店員要求或顧客願意一次「同時」選定兩球，則此時方法數為

$$C_2^{15}(\text{不同口味}) + 15(\text{相同口味}) = 120, \text{ 答案為(4)}$$

(B) 若店員作業之便，要求顧客「先」選出第一球，則此時方法數為

$$15(\text{第1球}) \times 15(\text{第2球}) = 225, \text{ 答案為(5)}$$

（若顧客考慮到不同口味的進食先後順序，要求店員先裝妥第一球，再依序裝妥第二球，則此時情形亦雷同）

(3) 因題目的用語無法判斷是上述何種情形，所謂的「任選」表示兩種情形都可以，日常生活也確實是如此，所以(4)120 及(5)225 都可以是正確答案。

(4) 另外，題目是問「幾種方法」而非問「口味的組合數」特此一併敘明。

意見回覆：

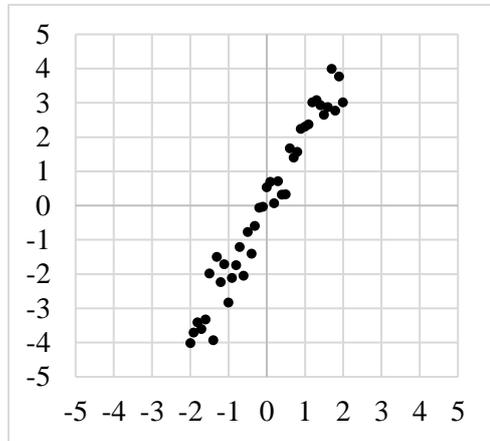
1. 依題目所述是在問口味的組合，並未提及口味的排列。
2. 翰林版第二冊 p.203 提及 C_k^n 表示在 n 個之後挑 k 個的方法數；全華版第二冊 p.192；泰宇版第二冊 p.137；三民第二冊 p.188；南一版 p.121；龍騰版 p.87 亦有類似敘述。可知，方法一詞並非專指排列數。

題號：3

題目：

3. 在處理二維數據時，有種方法是將數據垂直投影到某一直線，並以該直線為數線，進而了解投影點所成一維數據的變異。下圖的一組二維數據，試問投影到哪一選項的直線，所得之一維投影數據的變異數會是最小？

- (1) $y = 2x$
- (2) $y = -2x$
- (3) $y = -x$
- (4) $y = \frac{x}{2}$
- (5) $y = -\frac{x}{2}$



意見內容：

1.(1) 本題所考之概念為主成份分析。而非課綱中的最適直線。雖然這問題可以很好地引起學生資料分析的興趣，但「基本」學科能力測驗引入時需更謹慎用詞。本題想考的概念為資料分佈範圍，但卻誤用了非完全等價的變異數。變異數雖然可以看出資料分佈「大概」範圍，但資料分佈範圍並不能直接推論到變異數的大小。如下圖I、II所示，試問能否從圖中看出何者變異數較大呢？（II圖中的A'在I的A的右邊，B'在B的左邊，全距右方較小。但變異數右方較大）



因原題目並未說明，此組數據有多少個，故申請者已在符合題目所有條件及散佈圖之下，造出一個變異數最小為(3)的例子。請至以下連結下載：<https://reurl.cc/oeQayQ>。其他答案的例子應該也可以透過類似方式得出。故申請者認為本題應該送分。以下則為申請者在本題的其他建議。

- (2) 二維數據的投影「點」應該還是稱為二維數據。如果一開始該組二維數據是在一直線上，我們還說它是二維數據。雖題目中有敘明，以該直線為數線，去了解投影點所成一維數據的變異，但數線需有原點、方向、單位長。原點與方向不影響答案，但題目中並未敘明單位長。
- (3) 考變異數的概念，與資料分佈不一定等價。這題若改成問資料散佈範圍，如全距，則答案為(5)，但若是問變異數，答案就不一定。

- (4) 原始題目並未說明資料點之個數，且散佈圖中也有資料點部分重疊的情況，故一個散佈點在圖說中，有可能代表著許多資料。不能硬解釋成一個點一個資料，題目在敘述時應加上資料個數總數，此資訊也是資料分析中的重要參考依據。
2. 根據原題目，可從圖片左側及下方的兩數列(-5, -4, ..., 0, ..., 4, 5)推斷圖片裡通過方格中心的鉛直與水平線為 x 軸、何者為 y 軸，因此可以有下列兩種狀況：
- (1) 左側數線的數值代表 x 坐標、下方側代表 y 坐標：
此時中心鉛直線為 x 軸，水平線為 y 軸，此時符合題意要求（即變異數最小的直線）為 $y = 2x$ ，故選項(1)正確。
- (2) 左側數線的數值代表 y 坐標、下方側代表 x 坐標：
此時中心鉛直線為 y 軸，水平線為 x 軸，此時符合題意要求（即變異數最小的直線）為 $y = -0.5x$ ，故選項(5)正確。
- 因此，就此題狀況(1)、(2)皆符合題意，對於這兩種狀況分別對應的選項(1)、(5)我認為皆應予以給分。

意見回覆：

- 處理本題，只要將選項的五直線在同一圖中約略繪出，再觀察依題述將數據投影到這五直線時的分布情況，顯然可見將數據投影到 $y = -\frac{x}{2}$ 上時所得到的一維投影數據最集中，所得的變異數也就最小。
- 正常的統計圖表若有台端所舉極端情況，就不會用考題這樣的分布圖表示。當散布圖中資料點完全重疊時，在圖示時會以不同顏色與圖示標示，或特別說明，如：提及公正的骰子，不會特別講是指「六面」骰子，但若是四面體骰子就會特別說明。又教科書中例題的散布圖時亦是如此呈現，如：翰林版第二冊 p.151，南一版第二冊 p.66，三民版第二冊 p.138，泰宇版第二冊 p.219 及 p.224 動動筆 2；龍騰版第二冊 p.175 等。如依台端所述，最適直線也將無從討論。
- 12 年國民基本教育課程綱要數學領域課程手冊 p.542 關於二維數據基本說明提及本條目強調最適直線的教學重點是「先辨識可能有線型關係」，然後討論其「最適」的評量標準性。p.544 評量不要刻意創造一組特殊數據，使得統計量失去意義或產生無效的結果。
- 教科書（翰林第二冊 p.137；龍騰第二冊 p.154）提及通常我們將兩個可能相關的變量數據以點標示在坐標平面上，將每一組資料 (x_i, y_i) 描繪在坐標平面上，這樣所得的圖形稱為散布圖。又 12 年國民基本教育課程綱要數學領域課程手冊 p.409 對平面直角坐標系的定義為縱軸（ y 軸）、橫軸（ x 軸）。
- 此題評量投影概念以及「資料越集中則變異數越小」的基本概念，並未涉及主成分分析方法。

題號：13

題目：

13. 有一款線上遊戲推出「十連抽」的抽卡機制，「十連抽」意思為系統自動做十次的抽卡動作。若每次「十連抽」需用 1500 枚代幣，抽中金卡的機率在前九次皆為 2%，在第十次為 10%。今某生有代幣 23000 枚，且不斷使用「十連抽」，抽到不能再抽為止。則某生抽到金卡張數的期望值為 $\frac{(13-1) \cdot (13-2)}{10}$ 張。

意見內容：

- (1) 題幹中之字未提抽中金卡是「幾張」金卡，結尾卻冒出期望值「幾張」，各款遊戲送的張數不一，可能是一疊、兩組、三堆、一疊有 3 張，在前面未清楚說明「量詞」和「單位」的情況下，實在難以作答。
(2) 依期望值定義 $E(X) = \sum x_i p_i$ ， x_i 就是「幾張」的數量，但題目沒給條件，如何作答？
答案可能有無限多組，應予送分。
(3) 若是題幹「沒說幾張」就代表「一張」的話，這邏輯在數學裡根本不合邏輯！故此題應予送分。
2. 由第二句「若每次十連抽需用 1500 枚代幣，抽中金卡機率在前九次皆為 2%，第十次為 10%」，再由某生共可做 15 次十連抽卡，可判斷出此 15 次十連抽卡在前九次十連抽卡機率皆為 2%。因此，某生獲得金卡張數的期望值為 $140 \times 2\% + 10 \times 10\% = 3.8$ 張。
3. 此題不適合作為學科能力測驗考題，理由如下：
(1) 若使用各版本所教之方法（如下），計算量很大。

| | | | | | | | | |
|--------|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|-----|
| 抽到金卡張數 | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | ... | 150 |
| 機率 | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... | ... |

若使用期望值之可加性，雖可以簡化計算過程，然卻無法說明為何可以相加，此將造成學生「知其然不加其所以然」。

- (2) 領綱無提及期望值須（或無須）延伸至何種程度，多數版本課本僅提定義及意義，並無就期望值之運算性質多做說明。
- (3) 再查國家研究院出版之「數學領域課程手冊」p.547(3)略以「...教材不宜以數學的形式來定義期望值，又該如何解釋期望值之可加性？」

(4) 依大考中心針對「一綱多本」的命題方式說明：「各考科的命題將以課程綱要所列之主要概念為原則，並依據各考科的測驗目標設計試題。」期望值是主要概念毫無疑問，但可加性是否為主要概念，應於領綱中說明；另大考中心所謂測驗目標：「概念性知識、程序性知識、解決問題、推理能力、連結能力及閱讀與表達的能力」此題效度似乎不佳。

意見回覆：

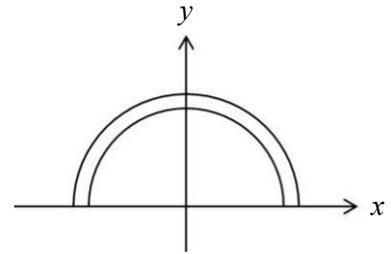
1. 除非另外規定，抽卡係指一次抽一張卡，依題目所述，所抽的這張卡可能是金卡或不是金卡，因此不會有台端所述抽一張卡卻可能是多張金卡的情形出現。
2. 「『十連抽』意思為系統自動做十次的抽卡動作。若每次十連抽需用 1500 枚代幣，抽中金卡機率在前九次皆為 2%，第十次為 10%」，係指十次的抽卡動作中，前九次皆為 2%，第十次為 10%。
3. 數學期望值 $E = m_1p_1 + m_2p_2 + \cdots + m_np_n$ ，其中 p_i 是發生事件之值為 m_i 的機率。亦提及「了解期望值，並能與平均值做對比」，見數學領域課程手冊 p.547；課本也有與此類似購買彩券的期望值例習題。
4. 每一次十連抽抽卡，前九次抽得金卡的期望值張數都是 0.02 張，第十次抽得金卡的期望值張數是 0.1 張，因此每一次十連抽抽得金卡的期望值張數為 $0.02 \times 9 + 0.1 = 0.28$ 張；共可進行 15 次十連抽，因此共可獲得金卡的期望值張數為 $0.28 \times 15 = 4.2$ 張。

題號：18-20

題目：

18-20 題為題組

坐標平面上有一環狀區域由圓 $x^2 + y^2 = 3$ 的外部與圓 $x^2 + y^2 = 4$ 的內部交集而成。某甲欲用一支長度為 1 的筆直掃描棒來掃描此環狀區域之 x 軸上方的某區域 R 。他設計掃描棒黑、白兩端分別在半圓 $C_1: x^2 + y^2 = 3 (y \geq 0)$ 、 $C_2: x^2 + y^2 = 4 (y \geq 0)$ 上移動。開始時掃描棒黑端在點 $A(\sqrt{3}, 0)$ ，白端在 C_2 的點 B 。接著黑、白兩端各沿著 C_1 、 C_2 逆時針移動，直至白端碰到 C_2 的點 $B'(-2, 0)$ 便停止掃描。



18. 試問點 B 的坐標為下列哪一選項？（單選題，3 分）

- (1) (0,2) (2) $(1, \sqrt{3})$ (3) $(\sqrt{2}, \sqrt{2})$ (4) $(\sqrt{3}, 1)$ (5) (2,0)

19. 令 O 為原點，掃描棒停止時黑、白兩端所在位置分別為 A', B' 。試在答題卷上作圖區中以斜線標示掃描棒掃過的區域 R ；並於求解區內求 $\cos \angle OA'B'$ 及點 A' 的極坐標。

（非選擇題，6 分）

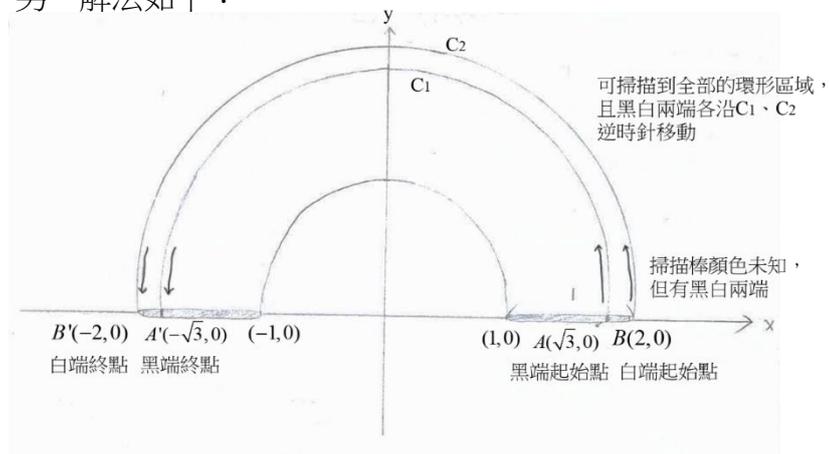
20.（承 19 題）令 Ω 表示掃描棒在第一象限所掃過的區域，試分別求 Ω 與 R 的面積。

（非選擇題，6 分）

意見內容：

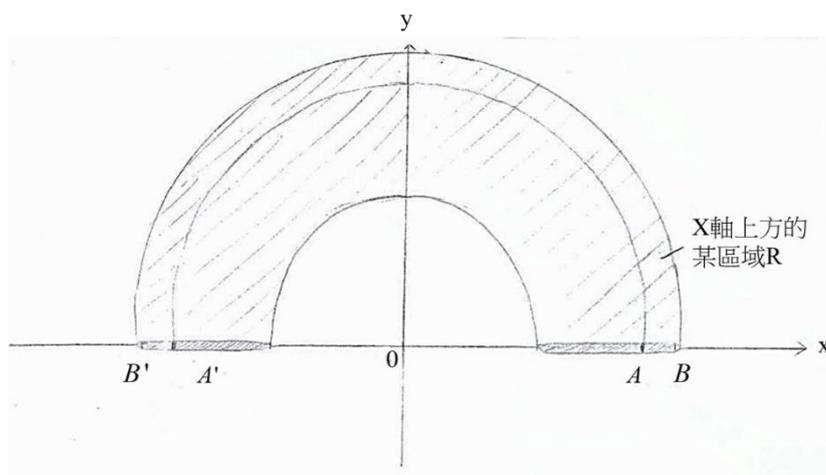
1.(1) 關於 18 題

因題目未詳述掃描棒的黑白兩端是否為掃描棒的首尾兩端，因此題目有另一種假設仍符合題幹所述，另一解法如下：



故答案除 $(\sqrt{3}, 1)$ 還有 (2,0) 此種可能。

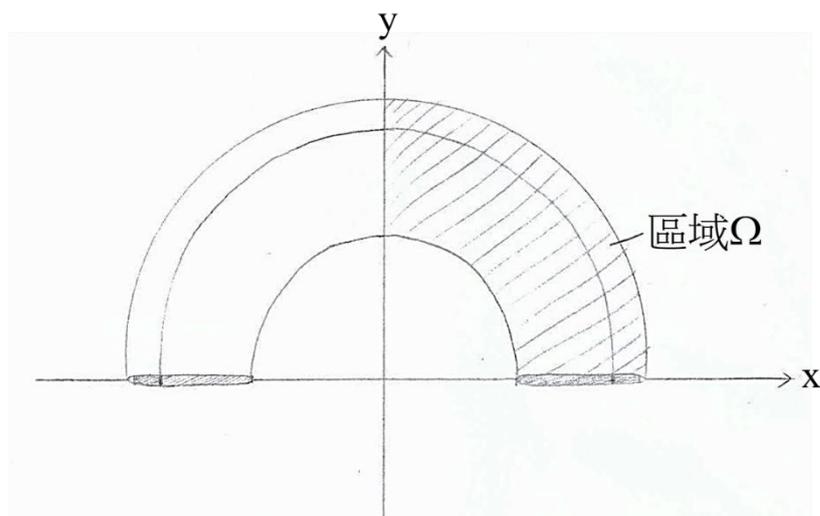
(2) 關於第 19 題



承第 18 題所述另解， $\angle OA'B' = 180^\circ$ ， $\cos \angle OA'B' = -1$ ， $A' = [\sqrt{3}, 180^\circ]$

(3) 關於第 20 題

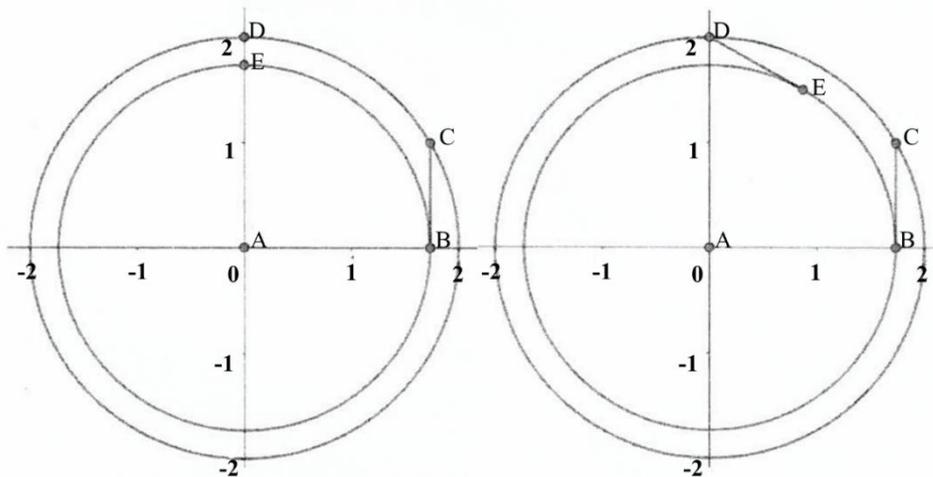
承第 18 題所述及 19 題所述另解



$$\Omega \text{ 面積} : 2^2\pi \times \frac{1}{4} - 1^2\pi \times \frac{1}{4} = \frac{3}{4}\pi, \quad R \text{ 面積} : 2^2\pi \times \frac{1}{2} - 1^2\pi \times \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\pi$$

2. 題敘僅寫「令 Ω 表示掃描棒在第一象限所掃過的區域」，筆者認為在如此題意下會造成兩種不同的解讀。

- (1) Ω 為掃描棒掃過的區域（即 R）中，屬於第一象限的部分（下左圖之 BCDE）
- (2) Ω 為掃描棒兩端皆完全位於第一象限時，所掃過的區域（下右圖之 BCDE）



據此，建議中心應開放兩個答案，分別為在這兩種解讀下之區域面積。

- 3.(1) 貴中心官網公告－111 學年度起適用之學科能力測驗各考科參考試卷公告（110 年 11 月 19 日更新國寫答題卷作答說明文字），其中數學 A 答題卷（A3 正式考試版），第貳部分，與 111 年正式學測數學 A 答題卷因有下列差異，致誤導考生發生簡章拾陸、違規處理辦法第 12 條第 2 項之規定，爰建議非選擇題 19-20 題作答於非相應作答區者，仍應予計分。
- (2) 差異：貴中心官網公告之參考答題卷只有 19 題，約 3/4 空白頁為解答區域，考生作答時若不敷使用，可自行翻面繼續再寫；正式學測答題卷有 20 題，且未依照貴中心發布的參考答題卷原則，提供空白面頁供考生自行書寫，而是在 19 題中間處劃一條橫線，分出上下部份，上半部有附圖，誤導考生以為上半部是 19 題作答區，下半部是 20 題作答區，那條橫線是 19 跟 20 題之劃分線，考生根本不知道 20 題強制在背面作答（沒有「請翻面繼續作答」等文字提醒），與公告之參考答題卷邏輯不同，也與考生理解自主性翻面作答不同。

意見回覆：

1. 查閱教育部國語辭典簡編本網頁（<https://dict.revised.moe.edu.tw/index.jsp>），「兩端」一詞釋義：兩頭，事物的兩個端點。即台端所指之首尾兩端。
2. 某甲欲用一支長度為 1 的筆直掃描棒來掃描此環狀區域之 x 軸上方的某區域 R 。……。令 Ω 表示掃描棒在第一象限所掃過的區域，意即在整個掃描過程中掃描棒在第一象限所掃過的區域，而非「掃描棒兩端皆完全位於第一象限時，所掃過的區域」。
3. 關於第 19、20 題作答於非相應作答區等事宜，會依閱卷相關規定評閱。