109 學年度指定科目考試
數學甲考科非選擇題參考答案

數學甲的題型有選擇、選填與非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理論證過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。關於較詳細的考生解題錯誤概念或解法，請參見本中心將於 8 月 15 日出刊的《選才電子報》。

109 學年度指定科目考試數學甲考科非選擇題各大題的參考答案說明如下：

第一題

第(1)小題（2 分）

直線 CD 的斜率為 $m=\dfrac{0-2}{4-3}=-2$，該直線方程式為 $y-0=-2(x-4)$，

即 $y=-2x+8$，所以 $a=-2$，$b=8$。

第(2)小題（2 分）

由除法原理，可設 $f(x)=(x^2-4x)Q(x)+rx+s$，且因圖形通過 $A(0,0)$ 及 $D(4,0)$ 知 $f(0)=f(4)=0$，代入得 $r=0$、$s=0$，所以 $f(x)$ 可被 $x(x-4)=x^2-4x$ 整除。

第(3)小題（4 分）

由直線 AB 斜率為 4，直線 CD 斜率為 -2，推得 $f'(0)=4$，$f'(4)=-2$，

以下提供兩個解法算出 $f(x)$。

解法一

由第(2)小題，設 $f(x)=(cx+d)(x^2-4x)$，得 $f'(x)=c(x^2-4x)+(cx+d)(2x-4)$

代入 $f'(0)=4$，$f'(4)=-2$，解聯立方程組得 $f(x)=x(x-4)(\frac{1}{8}x-1)$。

解法二

設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$，得 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$，

代入 $f(0)=0$，$f(4)=0$，$f'(0)=4$，$f'(4)=-2$，

解聯立方程組得 $f(x)=\dfrac{1}{8}x^3-\dfrac{3}{2}x^2+4x$。

第(4)小題（4 分）

解法一

由第(3)小題可得 $8f(x)=x(x-4)(x-8)=x^3-12x^2+32x$，
當 $2\le x\le 4$ 時，$8f(x)\ge 0$；當 $4\le x\le 6$ 時，$8f(x)\le 0$。

所以 $\int_2^6 |8f(x)|\,dx=\int_2^4 8f(x)\,dx-\int_4^6 8f(x)\,dx$。

$8f(x)$ 的反導函數為 $\frac{1}{4}x^4-4x^3+16x^2$，所以積分為

$$\left[\frac{1}{4}x^4-4x^3+16x^2\right]_2^4-\left[\frac{1}{4}x^4-4x^3+16x^2\right]_4^6=28+28=56$$

解法二

$8f(x)=x(x-4)(x-8)=x^3-12x^2+32x$，因 $f(x)=0$ 的根為 $x=0$、4、8，
由對稱性得 $(4,0)$ 為 $y=f(x)$ 的反曲點。

又當 $2\le x\le 4$ 時，$8f(x)\ge 0$，所以由對稱性得 $\int_2^6 |8f(x)|\,dx=2\int_2^4 8f(x)\,dx$，

$8f(x)$ 的反導函數為 $\frac{1}{4}x^4-4x^3+16x^2$，所以積分為 $2\left[\frac{1}{4}x^4-4x^3+16x^2\right]_2^4=56$

第二題

第(1)小題（2 分）

P 點坐標為 $\frac{1}{2}(0,1,0)+\frac{1}{2}(0,1,1)=(0,1,\frac{1}{2})$。

第(2)小題（2 分）

Q 點坐標為 $(1,1,t)$，又 $AQPR$ 為一平行四邊形，

所以 $\overrightarrow{AR}=\overrightarrow{QP}=(0,1,\frac{1}{2})-(1,1,t)=(-1,0,\frac{1}{2}-t)$

第(3)小題（4 分）

解法一

四角錐 G-$AQPR$ 可視為以 G 為頂點，平行四邊形 $AQPR$ 為底的四角錐，

故此四角錐體積為 $\frac{1}{3}\cdot|(\overrightarrow{AR}\times\overrightarrow{AQ})\cdot\overrightarrow{PG}|$

因 $(\overrightarrow{AR}\times\overrightarrow{AQ})=(-1,0,\frac{1}{2}-t)\times(0,1,t)=(t-\frac{1}{2},t,-1)$，又 $\overrightarrow{PG}=(0,0,\frac{1}{2})$

得四角錐 G-$AQPR$ 體積為 $\frac{1}{3}\times|(t-\frac{1}{2},t,-1)\cdot(0,0,\frac{1}{2})|=\frac{1}{6}$。

也可計算四角錐 G-$AQPR$ 以其他相鄰稜邊形成的平行四邊形為底的四角錐體積。

解法二

四角錐 $G\text{-}AQPR$ 可視為以 G 為頂點，平行四邊形 $AQPR$ 為底的四角錐，

故此四角錐體積為平行四邊形面積乘高的 $\frac{1}{3}$

由 $\overrightarrow{AR}\times\overrightarrow{AQ}=(-1,0,\frac{1}{2}-t)\times(0,1,t)=(t-\frac{1}{2},t,-1)$ 得

$AQPR$ 的面積 $=|\overrightarrow{AR}\times\overrightarrow{AQ}|=\sqrt{(t-\frac{1}{2})^2+t^2+1}$

代點 $A(1,0,0)$ 得 $AQPR$ 所在平面的方程式為 $(t-\frac{1}{2})x+ty-z=t-\frac{1}{2}$

故高為點 $G(0,1,1)$ 到此平面的距離 $\dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(t-\frac{1}{2})^2+t^2+1}}$ ，

求得四角錐 $G\text{-}AQPR$ 的體積 $\frac{1}{3}\times\sqrt{(t-\frac{1}{2})^2+t^2+1}\times\dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(t-\frac{1}{2})^2+t^2+1}}=\frac{1}{6}$ 。

解法三

四角錐 $G\text{-}AQPR$ 可視為以 A 為頂點的三稜邊所形成向量 $\overrightarrow{AQ}$、$\overrightarrow{AR}$、$\overrightarrow{AG}$張出的平行六面體體積的 $\frac{1}{3}$ 。

由題意 $\overrightarrow{AQ}=(0,1,t)$ 、$\overrightarrow{AR}=(-1,0,\frac{1}{2}-t)$ 、$\overrightarrow{AG}=(-1,1,1)$ ，

所以平行六面體體積為 $\left|\begin{vmatrix}0&1&t\\-1&0&\frac{1}{2}-t\\-1&1&1\end{vmatrix}\right|=|-(\frac{1}{2}-t)-t+1|=\frac{1}{2}$

故四角錐 $G\text{-}AQPR$ 的體積為 $\frac{1}{3}\times\frac{1}{2}=\frac{1}{6}$ 。

也可計算以 $G\text{-}AQPR$ 其他稜邊形成的平行六面體體積。

解法四

四角錐 $G\text{-}AQPR$ 可分割成兩個三角錐 $A\text{-}GPQ$、 $A\text{-}GPR$ 。

三角形 GPQ 與三角形 GPR 均可視為底為 $\frac{1}{2}$ 、高為 1 的三角形，故其面積均為 $\frac{1}{4}$

又 A 到兩平面 GPQ 與 GPR 的距離均為 1

故兩三角錐的體積均為 $\frac{1}{12}$ ，得四角錐體積為 $\frac{1}{12}+\frac{1}{12}=\frac{1}{6}$

第(4)小題（4 分）

解法一

當 $t=\frac{1}{4}$ 時，$\overrightarrow{AR}\times\overrightarrow{AQ}=(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},-1)$

故平行四邊形 $AQPR$ 的面積為 $|\overrightarrow{AR}\times\overrightarrow{AQ}|=\sqrt{(-\frac{1}{4})^2+(\frac{1}{4})^2+1}=\frac{3\sqrt{2}}{4}$

由第(3)小題知四角錐 G-$AQPR$ 的體積為 $\frac{1}{6}$，

故四角錐 G-$AQPR$ 的高即為題意所求距離 $\dfrac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{3}\times\frac{3\sqrt{2}}{4}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

解法二

當 $t=\frac{1}{4}$ 時，

平行四邊形 $AQPR$ 所在平面的法向量為 $\overrightarrow{AR}\times\overrightarrow{AQ}=(-\frac{1}{4},\frac{1}{4},-1)$

代 $A(1,0,0)$ 點可得此平面的方程式為 $-\frac{1}{4}x+\frac{1}{4}y-z+\frac{1}{4}=0$

故點 $G(0,1,1)$ 到平行四邊形 $AQPR$ 所在平面的距離為 $\dfrac{\frac{1}{2}}{\sqrt{(\frac{1}{4})^2+(\frac{1}{4})^2+1}}=\frac{\sqrt{2}}{3}$

解法三

當 $t=\frac{1}{4}$ 時，$\overrightarrow{RQ}$ 與 $\overrightarrow{AP}$、$\overrightarrow{GP}$ 皆垂直。令 G 到直線 AP 的垂足為 S，

由三垂線定理，$\overrightarrow{GS}$ 也與 $\overrightarrow{RQ}$ 垂直，故 G 到直線 AP 的距離就是 G 到平面 $AQPR$ 的距離。由 $\Delta GPS\approx\Delta APC$ (AA 性質)得 $\dfrac{\overline{GS}}{\sqrt{2}}=\dfrac{\frac{1}{2}}{\frac{3}{2}}$，故所求距離 $\overline{GS}=\frac{\sqrt{2}}{3}$。