109學年度指定科目考試
數學乙考科非選擇題參考答案

數學乙的題型有選擇、選填與非選擇題。非選擇題主要評量考生是否能夠清楚表達推理過程，答題時應將推理或解題過程說明清楚，且得到正確答案，方可得到滿分。如果計算錯誤，則酌給部分分數。如果只有答案對，但觀念錯誤，或過程不合理，則無法得到分數。

數學科非選擇題的解法通常不只一種，在此提供多數考生可能採用的解法以供各界參考。關於較詳細的考生解題錯誤概念或解法，請參見本中心將於8月15日出刊的《選才電子報》。

109學年度指定科目考試數學乙考科非選擇題各大題的參考答案說明如下：

第一題

第(1)小題 （4分）

解法一、對數律

由對數律得

$$\log P_n = \log P_0(1+r)^n = \log P_0 + n\log(1+r)$$

因此

$$A = \frac{\log P_5 - \log P_2}{3} = \frac{\log P_0 + 5\log(1+r) - \log P_0 - 2\log(1+r)}{3} = \log(1+r)$$

$$B = \frac{\log P_8 - \log P_6}{2} = \frac{\log P_0 + 8\log(1+r) - \log P_0 - 6\log(1+r)}{2} = \log(1+r)$$

所以 $A = \log(1+r) = B$

解法二、利用斜率

令 $y = \log P_x$ ，則 $y = \log P_0 + x\log(1+r)$ ，

其圖形是斜率為 $\log(1+r)$ 的直線。

又 A 與 B 均表示為該直線的斜率，故 $A = B = \log(1+r)$ 。

第(2)小題（5分）

由題意知 $P_{16} = 10P_0$ ，即 $P_0(1+r)^{16} = 10P_0$ 或 $(1+r)^{16} = 10$

因此

$$\frac{P_{20}}{P_{17}} \times \frac{P_8}{P_6} \times \frac{P_5}{P_2} = \frac{P_0(1+r)^{20} \times P_0(1+r)^8 \times P_0(1+r)^5}{P_0(1+r)^{17} \times P_0(1+r)^6 \times P_0(1+r)^2} = (1+r)^8 = \sqrt{10}$$

第(3)小題（4 分）

解法一、先化簡再代值

直接計算可得 $\frac{\log P_{20}-\log P_{17}}{3}=\log(1+r)$ ，由第(2)小題知 $1+r=10^{\frac{1}{16}}$ ，

得 $\log(1+r)=\log 10^{\frac{1}{16}}$ ，所以 $\frac{\log P_{20}-\log P_{17}}{3}=\frac{1}{16}$

解法二、直接代值計算

以 $1+r=10^{\frac{1}{16}}$ 代入，直接計算得

$$\frac{\log P_{20}-\log P_{17}}{3}=\frac{\log(P_0\times 10^{\frac{20}{16}})-\log(P_0\times 10^{\frac{17}{16}})}{3}=\frac{\log 10^{\frac{3}{16}}}{3}=\frac{1}{16}$$

解法三、利用斜率

利用 $\frac{\log P_{20}-\log P_{17}}{3}$ 為直線 $y=\log P_x=\log P_0+x\log(1+r)$ 的斜率，可得

$$\frac{\log P_{20}-\log P_{17}}{3}=\log(1+r)$$

以 $1+r=10^{\frac{1}{16}}$ 代入，得 $\frac{\log P_{20}-\log P_{17}}{3}=\frac{1}{16}$

第二題

第(1)小題（2 分）

因為 A 在 L_1 上、B 在 L_2 上、且平行線 L_1 和 L_2 間的距離為 5 恰等於 $\overline{AB}$ ，得知直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 垂直 L_1 。由題意知 L_1 的斜率為 2，因此 $\overleftrightarrow{AB}$ 的斜率 $=-\frac{1}{2}$

第(2)小題（4 分）

解法一、先算 $\overrightarrow{AB}$ 的方向

因為直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 垂直 L_1 ，且 L_1 的方向平行於 $(1,2)$ ，得知 $\overrightarrow{AB}=t(-2,1)$

由題意知 $\overline{AB}=5$ ，且 B 在第二象限，因此 $\overrightarrow{AB}=5\cdot\frac{1}{\sqrt{5}}(-2,1)=(-2\sqrt{5},\sqrt{5})$

解法二、先算 B 的坐標

因為 $\overline{AB}=5$，所以 $B(x,y)$ 滿足方程式：$\sqrt{(x-2)^2+(y+1)^2}=5$

依題意知 L_1 過 $A(2,-1)$ 且斜率為 2，得知 L_1 的方程式為：$2x-y=5$ 。

令 L_2 的方程式為：$2x-y=k$，因為平行線 L_1 和 L_2 間的距離為 5，得 $\dfrac{|k-5|}{\sqrt{5}}=5$，因此 $k=5\pm5\sqrt{5}$ 。

又直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 的方程式為：$x+2y=0$，因此 B 為下列聯立方程式中任兩式的解，

$$\begin{cases}(x-2)^2+(y+1)^2=25\\ \dfrac{|2x-y-5|}{\sqrt{5}}=5\\ x+2y=0\end{cases}$$

因為 B 點在第二象限，解得 $B\left(2-2\sqrt{5},-1+\sqrt{5}\right)$，因此 $\overrightarrow{AB}=\left(-2\sqrt{5},\sqrt{5}\right)$

解法三、利用 L_2 參數式求解

因為 L_1 的斜率是 2，$A(2,-1)$ 為 L_1 上一點，L_1 的方程式為：$2x-y-5=0$ 。

因為 L_1 、 L_2 平行，可設 L_2 的方程式為：$2x-y+k=0$。

又因為兩平行線距離為 5，我們有 $\dfrac{|k+5|}{\sqrt{5}}=5$ 故 $k=-5+5\sqrt{5}$ 或 $k=-5-5\sqrt{5}$ 。

因為 L_2 通過第二象限，故 $k=-5+5\sqrt{5}$，即得 L_2 的方程式為：$2x-y-5+5\sqrt{5}=0$ 。

因為 B 為 L_2 上一點，可設 B 的坐標為 $(t,2t-5+5\sqrt{5})$。

故 $\overrightarrow{AB}=(t-2,2t-4+5\sqrt{5})$，因為 $\overline{AB}=5$，所以 $(t-2)^2+(2t-4+5\sqrt{5})^2=25$

可解得 $t=2-2\sqrt{5}$。故 B 的坐標為 $B(2-2\sqrt{5},-1+\sqrt{5})$，可得 $\overrightarrow{AB}=\left(-2\sqrt{5},\sqrt{5}\right)$

第(3)小題（3 分）

因為直線 $\overleftrightarrow{AB}$ 垂直 L_2，由內積定義得知 $\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\overline{AB}^2=25$

第(4)小題（4 分）

解法一、利用內積

因為 L_3 的斜率為 3，A 和 C 都在 L_3 上，所以令 $\overrightarrow{AC}=(t,3t)$。再由第(2)小題和第(3)小題的結論可知

$$\overrightarrow{AB}\cdot\overrightarrow{AC}=\left(-2\sqrt{5},\sqrt{5}\right)\cdot(t,3t)=25$$

化簡可得 $\sqrt{5}t=25$，解得 $t=5\sqrt{5}$ 。因此

$\overrightarrow{AC}=\left(5\sqrt{5},15\sqrt{5}\right)$ 或 $\overrightarrow{AC}=5\sqrt{5}\left(1,3\right)$

解法二、先算 C 點坐標

依題意知 L_3 過 $A\left(2,-1\right)$ 且斜率為 3，得 L_3 的方程式為： $y=3x-7$ 。

由第(2)小題知 $\overrightarrow{AB}=\left(-2\sqrt{5},\sqrt{5}\right)$，可得知 $B\left(2-2\sqrt{5},-1+\sqrt{5}\right)$，所以 L_2 的方程式為：

$y=2x+5\sqrt{5}-5$

C 的坐標為聯立方程式 $\begin{cases} y=3x-7 \\ y=2x+5\sqrt{5}-5 \end{cases}$ 的解 ，解得 $C\left(x,y\right)=\left(2+5\sqrt{5},-1+15\sqrt{5}\right)$

因此 $\overrightarrow{AC}=\left(5\sqrt{5},15\sqrt{5}\right)$

解法三、先算 $\overline{AC}$ 長度

因為 L_3 的斜率為 3，A 和 C 都在 L_3 上，所以 $\overrightarrow{AC}$ 與 $\left(1,3\right)$ 同方向。由內積定義得知

$$\cos\angle BAC=\frac{\overrightarrow{AB}\cdot\left(1,3\right)}{\left|\overrightarrow{AB}\right|\cdot\left|\left(1,3\right)\right|}$$

利用第(2)小題得知 $\overrightarrow{AB}=\left(-2\sqrt{5},\sqrt{5}\right)$，代入上式可得 $\cos\angle BAC=\frac{\sqrt{5}}{5\sqrt{10}}=\frac{1}{5\sqrt{2}}$ ，

又 $\left|\overrightarrow{AC}\right|\cdot\cos\angle BAC=\overline{AB}=5$，可得 $\overline{AC}=25\sqrt{2}$

因此

$$\overrightarrow{AC}=25\sqrt{2}\cdot\frac{1}{\sqrt{10}}\left(1,3\right)=\left(5\sqrt{5},15\sqrt{5}\right)$$