大學入學考試中心
分科測驗參考試卷
（111學年度起適用）

數學甲考科

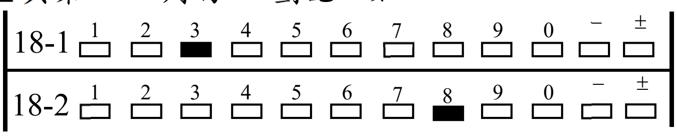
—作答注意事項—

考試時間：80分鐘

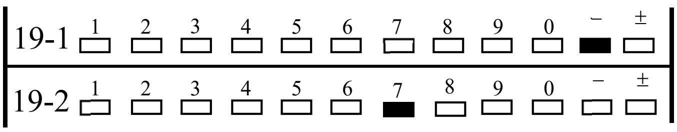
作答方式：

- 選擇題用 2B 鉛筆在「答題卷」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。
- 除題目另有規定外，非選擇題用筆尖較粗之黑色墨水的筆在「答題卷」上作答；更正時，可以使用修正液（帶）。
- 考生須依上述規定劃記或作答，若未依規定而導致答案難以辨識或評閱時，恐將影響考生成績並傷及權益。
- 答題卷每人一張，不得要求增補。
- 選填題考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子劃記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若答案格式是 $\dfrac{\text{18-1}}{\text{18-2}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\dfrac{3}{8}$ ，則考生必須分別在答案卡上的第 18-1 列的 3 與第 18-2 列的 8 劃記，如：



例：若答案格式是 $\dfrac{\text{19-1}\ \text{19-2}}{50}$ ，而答案是 $\dfrac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 19-1 列的 − 與第 19-2 列的 7 劃記，如：



選擇(填)題計分方式：

- 單選題：每題有n個選項，其中只有一個是正確或最適當的選項。各題答對者，得該題的分數；答錯、未作答或劃記多於一個選項者，該題以零分計算。
- 多選題：每題有n個選項，其中至少有一個是正確的選項。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得該題全部的分數；答錯k個選項者，得該題 $\dfrac{n-2k}{n}$ 的分數；但得分低於零分或所有選項均未作答者，該題以零分計算。
- 選填題每題有n個空格，須全部答對才給分，答錯不倒扣。

※試題中參考的附圖均為示意圖，試題後附有參考公式及數值。

大學入學考試中心

分科測驗（111 學年度起適用）

數學甲考科

參考試卷說明

本參考試卷為 111 學年度起適用之分科測驗數學甲考科參考試卷。大考中心依據以下二份文件所揭櫫之理念與目標而設計：

（一）108 學年度開始實施之「十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校—數學領域」。

（二）本中心所公布之 111 學年度起適用之「分科測驗數學甲考科考試說明」。

一、測驗科目與範圍

分科測驗數學甲考科的測驗範圍包括普通型高級中等學校部定 10 年級必修數學、11 年級必修數學 A 類、12 年級加深加廣選修數學甲類（詳細內容可參見分科測驗考試說明）。

二、題型、架構與配分

111 學年度起分科測驗數學甲考科的參考試卷架構分為兩部分，第壹部分為選擇題型，約占 76%；第貳部分為混合題型（兼含選擇與非選擇題）或非選擇題型，約占 24%，試卷的滿分為 100 分。上述題型與配分比例在未來正式考試時，可能因組卷之必要而有微調。

三、命題特色

配合「十二年國民基本教育課程綱要國民中小學暨普通型高級中等學校—數學領域」強調素養與跨領域精神，「分科測驗數學甲考科」的命題方向除了測驗高中階段學生的數學基本概念，也評量使用這些概念解決生活與學術探究情境問題的能力。

四、考生作答（答題卷）

此次答題卷為配合混合題型而設計，考生填答時須注意本考科試題本之「作答注意事項」的提示，並於規定的作答區撰寫。未來混合題型中的非選擇題可能有其他不同形式，每份試卷混合題的呈現方式未必皆相同，作答時須搭配「答題卷」，故務必詳讀試卷上的作答說明。

參考試卷呈現本中心未來命題方向、組卷架構、答題卷設計、參考答案／評分原則等可能樣貌，僅適宜作為參考練習、評量之示例；此外，本次試題除部分為原創外，亦有採用或修改歷年考題或研究用試題情形。本中心對本次公告之參考試卷，雖追求最高品質，但仍可能存在須調整精進之處，歡迎各界惠予指正、建議。

第壹部分、選擇題（單選題、多選題、選填題共占 76 分）

一、單選題（占 18 分）

說明：第 1 題至第 3 題，每題 6 分。

1. 甲國某傳染病大流行時，經統計發現高峰期間「染病人數每三天增加一倍」。用 $f(t)$ 表示從 $t=0$ 開始，染病人數隨時間 t 變化的函數，並假設 $f(0)=k$ (k 為正整數)。若 t 以天為單位，試選出可以代表甲國於高峰期間染病人數的函數模型。

 (1) $f(t)=\dfrac{k}{3}t+k$

 (2) $f(t)=\dfrac{1}{3}t^2+k$

 (3) $f(t)=k\times(\dfrac{2}{3})^t$

 (4) $f(t)=k\times 2^{\frac{t}{3}}$

 (5) $f(t)=\dfrac{k}{3}\times 2^t$

2. 在 ΔABC 中，若 $2\sin A=3\sin B=4\sin C$，則 $\angle A$的弧度量在下列哪一個區間內？

 (1) $(0,\dfrac{\pi}{3}]$

 (2) $(\dfrac{\pi}{3},\dfrac{\pi}{2}]$

 (3) $(\dfrac{\pi}{2},\dfrac{2\pi}{3}]$

 (4) $(\dfrac{2\pi}{3},\dfrac{3\pi}{4}]$

 (5) $(\dfrac{3\pi}{4},\pi)$

3. 某城市的氣象站位於坐標原點 O，此氣象站的觀察員觀測馬力颱風的行進路線，t 為觀測時間，單位為小時。當 $t=0$ 時，觀察到颱風中心位於點 A，其坐標為 $(600,600)$，單位為公里，正以每小時 10 公里的速度，朝西偏北 $30°$ 方向等速直線前進。假設颱風中心前進的方向與速度一直維持不變，且當 $t=a$ 時，馬力颱風中心最接近坐標原點 O，試選出正確的選項。

(1) $18<a<23$

(2) $23<a<28$

(3) $28<a<33$

(4) $33<a<38$

(5) $38<a<43$

二、多選題（占 40 分）

說明：第 4 題至第 8 題，每題 8 分。

4. 下表是某國在 2009 年至 2015 年間，運動選手的人數統計：

年份	男生	女生
2009	3410	1950
2010	3420	2000
2011	3540	2240
2012	3710	2370
2013	3830	2650
2014	3920	2780
2015	3990	2860

關於該國運動選手的敘述，試根據這張表選出正確的選項。

(1) 從2009年到2015年，男運動選手增加的總人數比女運動選手增加的總人數多

(2) 從2009年到2015年，平均一年增加了580名男運動選手

(3) 從2009年到2015年，每一年男女運動選手人數的差距都超過1000名

(4) 如果分別計算男女運動選手人數對年份的最適直線（迴歸直線），則男生的直線斜率小於女生的直線斜率

(5) 在2009年到2015年共7年中，該國平均一年有超過6000名運動選手

5. 坐標平面上有一以原點 O 為圓心的圓 C，交直線 $x-y+1=0$ 於 Q,R 兩點。已知圓 C 上有一點 P 使得 ΔPQR 為正三角形，試選出正確的選項。

(1) O 與 P 皆在 $\overline{QR}$ 的中垂線上

(2) P 在第三象限

(3) $\overline{QR}$ 的中點坐標為 $(-\frac{1}{3},\frac{2}{3})$

(4) 圓 C 的方程式為 $x^2+y^2=2$

(5) 圓 C 在 P 的切線方程式為 $x-y-1=0$

6. 橢圓 $\Gamma:\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$ 以原點為旋轉中心，逆時針旋轉 θ 角後，得新的橢圓 Γ'。若橢圓 Γ' 的對稱軸為 $x+y=0$ 與 $x-y=0$，試選出可為橢圓 Γ' 方程式的選項。

(1) $6x^2+5xy+6y^2=8$

(2) $6x^2-5xy+6y^2=8$

(3) $6x^2-5xy+6y^2=28$

(4) $5x^2+6xy+5y^2=16$

(5) $5x^2-6xy+5y^2=16$

7. 某甲練習投籃，每次投一球，其進球的機率為 0.3。假設每次投球均互相獨立，試選出正確的選項。

(1) 若某甲投兩球，則兩球都進的機率小於0.3

(2) 若某甲投三球，則恰進一球的機率等於恰進兩球的機率

(3) 某甲投四球恰進兩球的機率與投兩球恰進一球的機率相同

(4) 若某甲投10球，則其進球次數的期望值大於3

(5) 若某甲進球時就停止練習，則其投球次數的期望值大於3

8. 設 $f(x)=3x^2$，並定義數列 $\langle S_n \rangle$ 如下：對每一個正整數 n，將區間 $[0,2]$ 分割成 n 等分，且在區間 $\left[\frac{2(k-1)}{n},\frac{2k}{n}\right]$ 中任取一數 d_k $(k=1,2,\cdots,n)$，並令

$$S_n=\frac{1}{n}\left(f(d_1)+f(d_2)+\cdots+f(d_n)\right),$$

試選出正確的選項。

(1) $f(x)$ 在區間 $[0,2]$ 的所有函數值之平均為8

(2) $S_1<S_2$

(3) $0\le S_5\le 6$

(4) 數列 $\langle S_n \rangle$ 的每一項都是 $f(x)$ 在區間 $[0,2]$ 上的黎曼和

(5) 數列 $\langle S_n \rangle$ 一定收斂，且 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n=4$

三、選填題（占 18 分）

說明：第 9 至 11 題，每題 6 分。

9. 在坐標平面上，定義一個坐標變換 $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$，其中 $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ 代表舊坐標，$\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$ 代表新坐標。若舊坐標為 $\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$ 的點 P 經此坐標變換得到的新坐標為 $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}$，

則數對 $(r,s)=($ 9-1, 9-2 9-3 $)$。

10. 某甲的學校合作社，販售三明治有鮪魚、肉鬆、火腿與起司共四種，某甲每天到合作社買一個三明治當早餐，但他不會連續兩天買相同口味的三明治吃。已知某甲這個星期一買的是鮪魚三明治，則他從星期一至星期五把這四種三明治都吃過的方法有 10-1 10-2 種。

11. 在所有滿足 $z-\bar{z}=-3i$ 的複數 z 中（其中 $\bar{z}$ 為 z 的共軛複數，$i=\sqrt{-1}$），

$\left|\sqrt{7}+8i-z\right|$ 的最小值為 $\dfrac{\text{(11-1)(11-2)}}{\text{(11-3)}}$。（化成最簡分數）

第貳部分、混合題或非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有 2 題組，每一子題配分標於題末。限在標示題號作答區內作答。選擇題與「非選擇題作圖部分」使用 2B 鉛筆作答，更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液（帶）。非選擇題請由左而右橫式書寫，作答時必須寫出計算過程或理由，否則將酌予扣分。

12-14 題為題組

假設某衛星在一圓形軌道上運行。今以地球的地心為原點 O，地球的半徑為1單位長，建立一空間坐標系。此衛星在 $y=z$ 平面上以 O 為圓心，半徑為 2 單位的圓上繞地球運行。某一時刻有一太空人座落在坐標點 $P(2,2,6)$ 的位置。試回答下列問題。

12. 試問下列哪些點會在衛星的軌道上？（多選，2 分）

(1) $(0,1,\sqrt{3})$

(2) $(2,1,1)$

(3) $(0,\sqrt{2},\sqrt{2})$

(4) $(\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3})$

(5) $(\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}},\frac{2}{\sqrt{3}})$

13. 試求點 P 在 $y=z$ 平面上的投影點坐標。(4 分)

14. 試求衛星繞地球運行中與點 P 的最近距離為多少單位？(6 分)

15-17 題為題組

坐標空間中，有一立體 Γ 的底面位於 xy 平面上，且底面是由兩拋物線 $y=x^2$ 與 $y=8-x^2$ 圍成的區域，而 Γ 的每一個垂直 x 軸的截面都是等腰直角三角形，且三角形的斜邊在 xy 平面上。設每一個垂直 x 軸且通過 $(t,t^2,0)$ 的截面所成等腰直角三角形面積為 $A(t)$。試回答下列問題。

15. 試求此立體 Γ 的底面面積。(4 分)

16. 試以 t 表示 $A(t)$。(2 分)

17. 試證：當 $0\le x\le\sqrt{2}$ 時，$\int_0^x A(t)\,dt \ge \frac{1}{5}x^5$ 恆成立。(6 分)

參考公式及可能用到的數值

1. 首項為 a，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{n(2a+(n-1)d)}{2}$

   首項為 a，公比為 $r\,(r\neq 1)$ 的等比數列前 n 項之和為 $S=\dfrac{a(1-r^n)}{1-r}$

2. 級數和：$\sum_{k=1}^{n}k^2=\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$；$\sum_{k=1}^{n}k^3=\left(\dfrac{n(n+1)}{2}\right)^2$

3. 三角函數的和角公式：$\sin(A+B)=\sin A\cos B+\cos A\sin B$

$$\cos(A+B)=\cos A\cos B-\sin A\sin B$$

$$\tan(A+B)=\frac{\tan A+\tan B}{1-\tan A\tan B}$$

4. ΔABC 的正弦定理：$\dfrac{a}{\sin A}=\dfrac{b}{\sin B}=\dfrac{c}{\sin C}=2R$ （R 為 ΔABC 外接圓半徑）

   ΔABC 的餘弦定理：$c^2=a^2+b^2-2ab\cos C$

5. 一維數據 $X: x_1, x_2, \cdots, x_n$，

   算術平均數 $\mu_X=\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}x_i$；標準差 $\sigma_X=\sqrt{\dfrac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)^2}=\sqrt{\dfrac{1}{n}(\sum_{i=1}^{n}x_i^{\,2}-n\mu_X^{\,2})}$

6. 二維數據 $(X,Y):(x_1,y_1),(x_2,y_2),\cdots,(x_n,y_n)$，

   相關係數 $r_{X,Y}=\dfrac{\sum_{i=1}^{n}(x_i-\mu_X)(y_i-\mu_Y)}{n\sigma_X\sigma_Y}$

   最適直線（迴歸直線）方程式 $y-\mu_Y=r_{X,Y}\dfrac{\sigma_Y}{\sigma_X}(x-\mu_X)$

7. 參考數值：$\sqrt{2}\approx 1.414, \sqrt{3}\approx 1.732, \sqrt{5}\approx 2.236, \sqrt{6}\approx 2.449, \pi\approx 3.142$

   $\sin 23^\circ\approx 0.40$, $\sin 37^\circ\approx 0.60$, $\sin 53^\circ\approx 0.80$, $\cos 23^\circ\approx 0.92$, $\cos 37^\circ\approx 0.80$, $\cos 53^\circ\approx 0.60$

8. 對數值：$\log 2\approx 0.3010,\ \log 3\approx 0.4771,\ \log 5\approx 0.6990,\ \log 7\approx 0.8451$

9. 若 $X\sim B(n,p)$ 為二項分布，則期望值 $E(X)=np$，變異數 $V(X)=np(1-p)$；

   若 $X\sim G(p)$ 為幾何分布，則期望值 $E(X)=\dfrac{1}{p}$，變異數 $V(X)=\dfrac{(1-p)}{p^2}$。