分科測驗（111 學年度起適用）

數學甲考科參考試卷

試題解析

第壹部分、選擇題

試題編號：1

參考答案：(4)

測驗內容：F-10-1 一次與二次函數、F-11A-4 指數與對數函數

測驗目標：結合指數函數應用於疾病傳染按比例成長的數學模型

試題解析：因為染病人數每三天增加一倍，所以是以 2 為底數的指數函數。

設 $f(t)=c\times 2^{\frac{t}{3}}$，又 $f(0)=k$ 代入，$f(0)=c\times 2^{\frac{0}{3}}=c\times 1=k$，則 $f(t)=k\times 2^{\frac{t}{3}}$。

也可觀察 $f(0)=k, f(3)=2k, f(6)=2\times(2k)=2^2k, f(9)=2\times(2^2k)=2^3k$，依此可推導出 $f(3n)=2^n\times k$。令 $t=3n$，則 $f(t)=k\times 2^{\frac{t}{3}}$。

試題編號：2

參考答案：(3)

測驗內容：G-10-7 三角比的性質、F-11A-1 三角函數的圖形

測驗目標：應用正弦定理與餘弦定理求三角形內角度數範圍

試題解析：$2\sin A=3\sin B=4\sin C$，所以 $\frac{\sin A}{6}=\frac{\sin B}{4}=\frac{\sin C}{3}$，

由正弦定理 $\frac{a}{6}=\frac{b}{4}=\frac{c}{3}=k\Rightarrow a=6k,\ b=4k,\ c=3k$，

其中 a,b,c 分別為 $\angle A,\angle B,\angle C$ 的對邊長，

由餘弦定理 $36k^2=16k^2+9k^2-24k^2\cos A\Rightarrow \cos A=-\frac{11}{24}$，

$\cos\frac{2\pi}{3}=-\frac{1}{2}, \cos\frac{\pi}{2}=0$，由 $-\frac{1}{2}<-\frac{11}{24}<0$，推得 $\frac{\pi}{2}<\angle A<\frac{2\pi}{3}$。

試題編號：3

參考答案：(1)

測驗內容：G-10-6 三角比，G-11A-6 平面向量的運算

測驗目標：評量三角比與直線參數式的應用

試題解析：因為颱風朝西偏北 30°，且以每小時 10 公里的速度前進，所以，颱風的方向向量為 $(-5\sqrt{3},5)$。

【解法一】可設颱風位置為 $P(600-5\sqrt{3}t,600+5t)$ 時與原點距離最近，此時 $\overrightarrow{OP}$ 與颱風的方向向量 $(-5\sqrt{3},5)$ 垂直。因此，由內積 $(600-5\sqrt{3}t,600+5t)\cdot(-5\sqrt{3},5)=0$，得知 $t=30\sqrt{3}-30\approx 21.96$。

【解法二】

令颱風位置 $P:\begin{cases} x=600-5\sqrt{3}t \\ y=600+5t \end{cases}$, $t\geq 0$。

則 $\overline{OP}^2=(600-5\sqrt{3}t)^2+(600+5t)^2=100t^2-2(30\sqrt{3}-30)\times 100t+600^2+600^2$

$=100(t-(30\sqrt{3}-30))^2+d$。

所以，當 $t=30\sqrt{3}-30\approx 21.96$ 時，$\overline{OP}$ 有最小值。

試題編號：4

參考答案：(3)(4)(5)

測驗內容：D-10-2 數據分析

測驗目標：評量閱讀表格與分析數據

試題解析：選項(1)：經過 6 年，男生選手增加 580 名，女生選手增加 910 名，女生選手增加較男生為多。

選項(2)：經過 6 年總共增加 580 名男性選手，每年平均約增加 97 名。

選項(3)：估算 2009 年至 2015 年的男女差距，可知每年差距都超過 1000 名。

選項(4)：經過 6 年，男生選手總共增加 580 名，女生選手總共增加 910 名，因女生的變化率較高，故女生的斜率較男生的斜率大，或是繪圖看出最適直線斜率大小。亦可直接求出男運動選手的最適直線斜率約為 108.21，女運動選手的最適直線斜率約為 167.857。

選項(5)：2009 年與 2015 年人數的平均超過 6000。同樣的 2010 年與 2014 年人數的平均也超過 6000，以此類推，所以平均一年的運動員人數會超過 6000。當然，也可以直接算出平均一年的運動員人數

$=\dfrac{\text{7年內的所有運動員人數}}{7}=\dfrac{42670}{7}>6000$。

試題編號：5

參考答案：(1)(4)

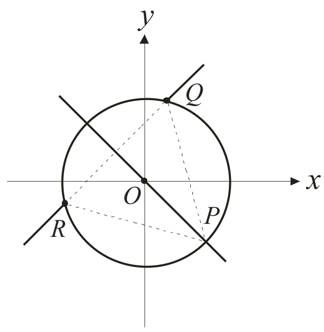
測驗內容：G-10-2 直線方程式、G-10-3 圓方程式、G-10-4 直線與圓

測驗目標：評量圖形對稱概念與點到直線的距離

試題解析：選項(1)：因為$\overline{OQ}=\overline{OR},\overline{PQ}=\overline{PR}$，所以$O$與$P$皆在$\overline{QR}$的中垂線上。

選項(2)：由於$x-y+1=0$通過一、二、三象限，且O為正三角形PQR的外心，根據對稱性知P在第四象限。

選項(3)：由選項(1)知O與$\overline{QR}$中點的連線應與$x-y+1=0$垂直，故$\overline{QR}$的中點坐標為$(-\frac{1}{2},\frac{1}{2})$。



選項(4)：因O為ΔPQR的重心，故由O點到$x-y+1=0$的距離為$\frac{\sqrt{2}}{2}$，得圓半徑為$\sqrt{2}$。

選項(5)：過P點的切線與$x-y+1=0$平行，又點P在第四象限且$\overline{OP}=\sqrt{2}$，得切線為$x-y-2=0$。

試題編號：6

參考答案：(4)(5)

測驗內容：G-12-甲-1 二次曲線

測驗目標：評量橢圓旋轉的概念

試題解析：橢圓$\Gamma:\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$的對稱軸為$y=0$與$x=0$，

橢圓Γ'的對稱軸為$x+y=0$與$x-y=0$，

表示橢圓Γ轉$\theta=45°$或$135°$得橢圓Γ'。

利用圖形旋轉公式$\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & -\sin\theta\\ \sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}$或$\begin{bmatrix}x\\y\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ -\sin\theta & \cos\theta\end{bmatrix}\begin{bmatrix}x'\\y'\end{bmatrix}$，

將橢圓Γ轉$45°$或$135°$得橢圓如下：

(1) $\begin{cases}x=\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'\\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'\end{cases}$ 代入$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$，化簡得到$\Gamma'$：$5x^2-6xy+5y^2=16$。

(2) $\begin{cases}x=-\frac{\sqrt{2}}{2}x'+\frac{\sqrt{2}}{2}y'\\ y=-\frac{\sqrt{2}}{2}x'-\frac{\sqrt{2}}{2}y'\end{cases}$ 代入$\frac{x^2}{8}+\frac{y^2}{2}=1$，化簡得到$\Gamma'$：$5x^2+6xy+5y^2=16$。

試題編號：7

參考答案：(1)(5)

測驗內容：D-12-甲-2 二項分布與幾何分布

測驗目標：評量二項分布與幾何分布的機率與期望值

試題解析：選項(1)：$(0.3)^2 < 0.3$。

選項(2)：$C_1^3 \times 0.3 \times 0.7^2 \neq C_2^3 \times 0.3^2 \times 0.7$。

選項(3)：$C_2^4 \times 0.3^2 \times 0.7^2 \neq C_1^2 \times 0.3 \times 0.7$。

選項(4)：$E(X) = 10 \times 0.3 = 3$。

選項(5)：$E(X) = \dfrac{1}{0.3} = \dfrac{10}{3} > 3$

試題編號：8

參考答案：(3)(5)

測驗內容：F-12-甲-5 黎曼和、F-12-甲-7 積分的應用、N-12-甲-1 數列的極限

測驗目標：評量定積分與黎曼和的連結，連續函數值的平均

試題解析：選項(1)：$f(x)$ 在區間 $[0,2]$ 中所有函數值之平均為 $\dfrac{1}{2-0}\int_0^2 3x^2 dx = 4$。

選項(2)：對 $n=1$，取 $d_1 = 2$，得 $S_1 = \dfrac{3\times 2^2}{1} = 12$，

對 $n=2$，取 $d_1 = 1, d_2 = 2$，得知 $S_2 = \dfrac{3\times 1^2 + 3\times 2^2}{2} = \dfrac{15}{2} < S_1$。

選項(3)：$S_n = \dfrac{3{d_1}^2 + 3{d_2}^2 + \cdots + 3{d_n}^2}{n} \le \dfrac{3(2^2 + 4^2 + \cdots + (2n)^2)}{n^3}$

$= \dfrac{12(1^2 + 2^2 + \cdots + n^2)}{n^3} = \dfrac{2(n+1)(2n+1)}{n^2}$。

當 $n=5$ 時，$S_5 \le \dfrac{2\times 6\times 11}{25} \approx 5.3 < 6$。

選項(4)：$S_n = \dfrac{f(d_1) + f(d_2) + \cdots + f(d_n)}{n} = \sum_{k=1}^{n} \dfrac{1}{2} f(d_k) \times \dfrac{2}{n}$ 都是 $\dfrac{1}{2} f(x)$ 在區間 $[0,2]$ 上的黎曼和。

選項(5)：因為 $f(x) = 3x^2$ 為連續函數，所以

$$\lim_{n\to\infty} S_n = \int_0^2 \frac{1}{2} f(x) dx = \int_0^2 \frac{3}{2} x^2 dx = 4 \text{ 。}$$

或利用 $\dfrac{2(n-1)(2n-1)}{n^2} \le S_n \le \dfrac{2(n+1)(2n+1)}{n^2}$ 及夾擠定理，可得 $\lim\limits_{n\to\infty} S_n = 4$。

試題編號：9

參考答案：$(3,-1)$

測驗內容：A-11A-3 矩陣的運算

測驗目標：評量二階矩陣乘法與求解聯立方程式

試題解析：由題意利用矩陣乘法可得聯立方程式$\begin{cases} r-2=1 \\ -r+2s+3=-2 \end{cases}$。求解可得 $r=3$ 、 $s=-1$ 。

也可由題意 $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}$，得 $\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \end{bmatrix}-\begin{bmatrix} -2 \\ 3 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} r \\ s \end{bmatrix}$。

試題編號：10

參考答案：36

測驗內容：D-10-3 有系統的計數

測驗目標：評量依題意有系統的窮舉、樹狀圖、加法原理、乘法原理

試題解析：【解法一】設鮪魚為 A、肉鬆為 B、火腿為 C 與起司為 D，列出可能情形如下：

$$\begin{array}{l} 一\to二\to三\to四\to五 \\ A\to B\to A\to\left[\begin{array}{l} C\to D \\ D\to C \end{array}\right. \end{array},$$

$$\begin{array}{l} 一\to二\to三\to四\to五 \\ A\to B\to C\to\left[\begin{array}{l} D\to\left[\begin{array}{l} A \\ B \\ C \end{array}\right. \\ A\to D \\ B\to D \end{array}\right. \end{array},\quad \begin{array}{l} 一\to二\to三\to四\to五 \\ A\to B\to D\to\left[\begin{array}{l} C\to\left[\begin{array}{l} A \\ B \\ D \end{array}\right. \\ A\to C \\ B\to C \end{array}\right. \end{array}$$

共 12 種，依此類推，

$A\to C\to\boxed{三}\to\boxed{四}\to\boxed{五}$ 共 12 種，

$A\to D\to\boxed{三}\to\boxed{四}\to\boxed{五}$ 共 12 種，

總計有 36 種。

【解法二】星期二到星期五這四天中分成以下兩種情況：

(1) 若有再買鮪魚 A，則另三種 B、C、D 各買一次。因 A 不能排第一個位置，故有 $4!-3!=18$ 種排法。

(2) 若沒有再買鮪魚 A，則星期二到星期五這四天買的情形有三類：BBCD、BCCD、BCDD。因相同者不相鄰，各有 $\dfrac{4!}{2!}-3!=6$ 種排法，故共有 $3\times6=18$ 種排法。

合併以上兩種情況的排法，共有 36 種。

試題編號：11

參考答案：$\frac{19}{2}$

測驗內容：N-12 甲-3 複數

測驗目標：評量複數運算以及複數平面的幾何意涵

試題解析：設 $z=a+bi$ ，由 $z-\bar{z}=-3i$ 可推得 $b=\frac{-3}{2}$ ，故 $z=a-\frac{3}{2}i$ (即直線 $y=\frac{-3}{2}$)。

【解法一】 $\left|\sqrt{7}+8i-z\right|$ 的最小值即為點 $(\sqrt{7},8)$ 到直線 $y=\frac{-3}{2}$ 的最短距離，即 $8-(\frac{-3}{2})=\frac{19}{2}$ 。

【解法二】

$\left|\sqrt{7}+8i-z\right|=\left|\sqrt{7}+8i-a+\frac{3}{2}i\right|=\left|(\sqrt{7}-a)+\frac{19}{2}i\right|=\sqrt{(\sqrt{7}-a)^2+(\frac{19}{2})^2}\geq\frac{19}{2}$ 。

所以當 $a=\sqrt{7}$ 時，$\left|\sqrt{7}+8i-z\right|$ 有最小值 $\frac{19}{2}$ 。

第貳部分、混合題或非選擇題

12-14 題為題組

試題編號：12

參考答案：(3)(4)(5)

測驗內容：G-11A-2 空間坐標系、G-11A-9 平面方程式

測驗目標：評量空間中特殊平面上的點坐標

試題解析：在 $y=z$ 平面上的點可設為 (a,b,b) ，因此，點 (a,b,b) 位在以 O 為圓心、半徑為 2 的圓上之充要條件為 $a^2+2b^2=4$ 。故滿足條件的選項為(3)(4)(5)。

試題編號：13

參考答案： $(2,4,4)$

測驗內容：G-11A-7 空間向量的運算、G-11A-9 平面方程式

測驗目標：評量空間中的點在平面上的投影

試題解析：【解法一】設點 $Q(a,b,b)$ 為點 P 在 $y=z$ 平面上的投影點，則

$$\overrightarrow{PQ}=(a-2,b-2,b-6)$$ 。

因為 $\overrightarrow{PQ}$ 與平面 $y=z$ 的法向量 $(0,1,-1)$ 平行，可設 $\overrightarrow{PQ}=t(0,1,-1)$ ，推得 $a-2=0$ 且 $b-2=-(b-6)$ ，解得 $a=2$ ， $b=4$ ，故點 Q 的坐標為 $(2,4,4)$ 。

【解法二】設點 Q 為點 P 在 $y=z$ 平面上的投影點。利用 $\overrightarrow{QP}$ 即為 $\overrightarrow{OP}$ 在平面 $y=z$ 的法向量 $(0,1,-1)$ 之正射影，得知：

$$\overrightarrow{QP}=\frac{\overrightarrow{OP}\cdot(0,1,-1)}{2}(0,1,-1)=\left(0,-2,2\right)\text{ 。}$$

因此， $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{QP}=(2,2,6)-(0,-2,2)=(2,4,4)$ ；

故投影點 Q 的坐標為 $(2,4,4)$ 。

試題編號：14

參考答案： $2\sqrt{6}$

測驗內容：G-11A-2 空間坐標系、G-11A-7 空間向量的運算

測驗目標：評量空間中某一定點與圓的最短距離

試題解析：【解法一】令 $X(a,b,b)$ 為 $\overline{OQ}$ 與衛星所在的圓之交點，則所求之最近距離即為 $\overline{PX}$ 。由 $\overline{QX}=\overline{OQ}-\overline{OX}=6-2=4$ ，得知：

$$\overline{PX}=\sqrt{\overline{PQ}^2+\overline{QX}^2}=\sqrt{8+16}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}\text{ 。}$$

【解法二】衛星 $X(a,b,b)$ 到點 P 的距離為

$$\begin{aligned}d(X,P)&=\sqrt{(a-2)^2+(b-2)^2+(b-6)^2}\\&=\sqrt{a^2+2b^2-4(a+4b)+44}=\sqrt{48-4(a+4b)}\text{ ，}\end{aligned}$$

其中 $a^2+2b^2=4$ 。又由柯西不等式 $36=(a^2+2b^2)(1+8)\geq(a+4b)^2$ ，

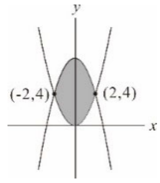
得知： $-6\leq a+4b\leq 6$ 。因此 $d(X,P)\geq\sqrt{48-4\times 6}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ 。

當 $a=\frac{2}{3},b=\frac{4}{3}$ 時，上述的等號成立。因此，當衛星 X 的坐標為 $(\frac{2}{3},\frac{4}{3},\frac{4}{3})$ 時；所求距離最小值等於 $d(P,X)=2\sqrt{6}$ 。

15-17 題為題組

試題編號：15

參考答案：$\frac{64}{3}$



測驗內容：F-12 甲-6 積分

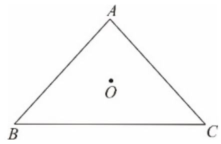
測驗目標：利用定積分求兩曲線所圍成的區域面積

試題解析：解方程式 $x^2 = 8 - x^2$，得 $x = \pm 2$；故兩拋物線的交點為 $(-2,4)$ 及 $(2,4)$。因為立體 Γ 的底面恰為此兩拋物線圍成的封閉區域，因此 Γ 的底面面積為

$$\int_{-2}^{2} \left| x^2 - (8 - x^2) \right| dx = \int_{-2}^{2} \left((8 - x^2) - x^2 \right) dx = \int_{-2}^{2} \left(8 - 2x^2 \right) dx = 8x - \frac{2}{3}x^3 \Big|_{-2}^{2} = \frac{64}{3}$$ 。

試題編號：16

參考答案：$t^4 - 8t^2 + 16$



測驗內容：F-12 甲-7 積分的應用

測驗目標：評量切片積分法

試題解析：當 $x = t$ 時，立體 Γ 與平面 $x = t$ 的截面為等腰直角三角形 ABC，其中 $B(t, t^2, 0)$、$C(t, (8 - t^2), 0)$。底邊(斜邊) $\overline{BC} = (8 - t^2) - t^2 = 8 - 2t^2$，故兩腰(股)長為

$\overline{AB} = \overline{AC} = \frac{8 - 2t^2}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2} - \sqrt{2}t^2$。因此，截面 ΔABC 的面積為

$$A(t) = \frac{1}{2}(\overline{AB} \times \overline{AC}) = \frac{1}{2}(4\sqrt{2} - \sqrt{2}t^2)^2 = (4 - t^2)^2 = t^4 - 8t^2 + 16$$ 。

試題編號：17

參考答案：略

測驗內容：F-12 甲-4 導函數、F-12 甲-6 積分

測驗目標：評量函數的單調性判定，微積分基本定理

試題解析：【解法一】因為 $A(t) = t^4 - 8t^2 + 16$，故

$$\int_0^x A(t)\,dt = \int_0^x (t^4 - 8t^2 + 16)\,dt = \left(\frac{1}{5}t^5 - \frac{8}{3}t^3 + 16t\right)\Big|_0^x = \frac{1}{5}x^5 - \frac{8}{3}x^3 + 16x$$ 。

其中 $g(x) = -\frac{8}{3}x^3 + 16x$ 在區間 $[0, \sqrt{2}]$ 上是遞增函數，因為 $g'(x) = -8x^2 + 16 \ge 0$。

因此，當 $0 \le x \le \sqrt{2}$ 時，$g(x) \ge g(0) = 0$；故 $\int_0^x A(t)\,dt \ge \frac{1}{5}x^5$。

【解法二】令 $h(x)=\int_0^x A(t)\,dt-\frac{1}{5}x^5$ 。

當 $0\le x\le\sqrt{2}$ 時，利用微積分基本定理，

$h'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x A(t)\,dt-x^4=A(x)-x^4=-8x^2+16\ge 0$ ；

故 $h(x)$ 為遞增函數。因此，當 $0\le x\le\sqrt{2}$ 時， $h(x)\ge h(0)=0$ ，即

$\int_0^x A(t)\,dt\ge\frac{1}{5}x^5$ 。