分科測驗（111 學年度起適用）

數學甲考科參考試卷

參考答案

第壹部分、選擇題

題號	參考答案	題號	參考答案
1	4	9-1	3
2	3	9-2	−
3	1	9-3	1
4	345	10-1	3
5	14	10-2	6
6	45	11-1	1
7	15	11-2	9
8	35	11-3	2

第貳部分、混合題或非選擇題

題號	參考答案
12	345
13	【解法一】設點 $Q(a,b,b)$ 為點 P 在 $y=z$ 平面上的投影點，則 $\overrightarrow{PQ}=(a-2,b-2,b-6)$ 。 因為 $\overrightarrow{PQ}$ 與平面 $y=z$ 的法向量 $(0,1,-1)$ 平行，可設 $\overrightarrow{PQ}=t(0,1,-1)$ ，推得 $a-2=0$ 且 $b-2=-(b-6)$ ，解得 $a=2$ ，$b=4$ ，故點 Q 的坐標為 $(2,4,4)$ 。 【解法二】設點 Q 為點 P 在 $y=z$ 平面上的投影點。利用 $\overrightarrow{QP}$ 即為 $\overrightarrow{OP}$ 在平面 $y=z$ 的法向量 $(0,1,-1)$ 之正射影，得知： $\overrightarrow{QP}=\dfrac{\overrightarrow{OP}\cdot(0,1,-1)}{2}(0,1,-1)=\left(0,-2,2\right)$ 。 因此， $\overrightarrow{OQ}=\overrightarrow{OP}-\overrightarrow{QP}=(2,2,6)-(0,-2,2)=(2,4,4)$ ； 故投影點 Q 的坐標為 $(2,4,4)$ 。
14	【解法一】令 $X(a,b,b)$ 為 $\overline{OQ}$ 與衛星所在的圓之交點，則所求之最近距離即為 $\overline{PX}$。由 $\overline{QX}=\overline{OQ}-\overline{OX}=6-2=4$ ，得知： $\overline{PX}=\sqrt{\overline{PQ}^2+\overline{QX}^2}=\sqrt{8+16}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ 。 【解法二】衛星 $X(a,b,b)$ 到點 P 的距離為 $d(X,P)=\sqrt{(a-2)^2+(b-2)^2+(b-6)^2}$ $=\sqrt{a^2+2b^2-4(a+4b)+44}=\sqrt{48-4(a+4b)}$ ， 其中 $a^2+2b^2=4$ 。又由柯西不等式 $36=(a^2+2b^2)(1+8)\geq(a+4b)^2$ ， 得知： $-6\leq a+4b\leq 6$ 。因此 $d(X,P)\geq\sqrt{48-4\times6}=\sqrt{24}=2\sqrt{6}$ 。 當 $a=\dfrac{2}{3},b=\dfrac{4}{3}$ 時，上述的等號成立。因此，當衛星 X 的坐標為 $(\dfrac{2}{3},\dfrac{4}{3},\dfrac{4}{3})$ 時；所求距離最小值等於 $d(X,P)=2\sqrt{6}$ 。
15	解方程式 $x^2=8-x^2$ ，得 $x=\pm2$ ；故兩拋物線的交點為 $(-2,4)$ 及 $(2,4)$ 。 因為立體 Γ 的底面恰為此兩拋物線圍成的封閉區域，因此 Γ 的底面面積為 $\int_{-2}^{2}\left\|x^2-(8-x^2)\right\|dx=\int_{-2}^{2}\left((8-x^2)-x^2\right)dx=\int_{-2}^{2}\left(8-2x^2\right)dx=8x-\dfrac{2}{3}x^3\Big\|_{-2}^{2}=\dfrac{64}{3}$ 。

題號	參考答案
16	當 $x=t$ 時，立體 Γ 與平面 $x=t$ 的截面為等腰直角三角形 ABC ，其中 $B(t,t^2,0)$ 、 $C(t,(8-t^2),0)$ 。底邊(斜邊) $\overline{BC}=(8-t^2)-t^2=8-2t^2$ ，故兩腰(股)長為 $\overline{AB}=\overline{AC}=\dfrac{8-2t^2}{\sqrt{2}}=4\sqrt{2}-\sqrt{2}t^2$ 。因此，截面 ΔABC 的面積為 $A(t)=\dfrac{1}{2}(\overline{AB}\times\overline{AC})=\dfrac{1}{2}(4\sqrt{2}-\sqrt{2}t^2)^2=(4-t^2)^2=t^4-8t^2+16$ 。
17	【解法一】因為 $A(t)=t^4-8t^2+16$ ，故 $\int_0^x A(t)\,dt=\int_0^x (t^4-8t^2+16)\,dt=\left(\frac{1}{5}t^5-\frac{8}{3}t^3+16t\right)\Big\vert_0^x=\frac{1}{5}x^5-\frac{8}{3}x^3+16x$ 。 其中 $g(x)=-\frac{8}{3}x^3+16x$ 在區間 $[0,\sqrt{2}]$ 上是遞增函數，因為 $g'(x)=-8x^2+16\ge 0$ 。 因此，當 $0\le x\le\sqrt{2}$ 時，$g(x)\ge g(0)=0$ ；故 $\int_0^x A(t)\,dt\ge\frac{1}{5}x^5$ 。 【解法二】令 $h(x)=\int_0^x A(t)\,dt-\frac{1}{5}x^5$ 。 當 $0\le x\le\sqrt{2}$ 時，利用微積分基本定理， $h'(x)=\frac{d}{dx}\int_0^x A(t)\,dt-x^4=A(x)-x^4=-8x^2+16\ge 0$ ； 故 $h(x)$ 為遞增函數。因此，當 $0\le x\le\sqrt{2}$ 時， $h(x)\ge h(0)=0$ ， 即 $\int_0^x A(t)\,dt\ge\frac{1}{5}x^5$ 。