大學入學考試中心　指定科目考試參考試卷

數學甲參考答案

選擇（填）題：

<table>
<tr><th colspan="2">題號</th><th>答案</th></tr>
<tr><td colspan="2">1</td><td>5</td></tr>
<tr><td colspan="2">2</td><td>4</td></tr>
<tr><td colspan="2">3</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="2">4</td><td>2</td></tr>
<tr><td colspan="2">5</td><td>3</td></tr>
<tr><td colspan="2">6</td><td>1,2,3,5</td></tr>
<tr><td colspan="2">7</td><td>2,5</td></tr>
<tr><td colspan="2">8</td><td>2,3</td></tr>
<tr><td colspan="2">9</td><td>1,3,4,5</td></tr>
<tr><td rowspan="4">A</td><td>10</td><td>1</td></tr>
<tr><td>11</td><td>－</td></tr>
<tr><td>12</td><td>2</td></tr>
<tr><td>13</td><td>3</td></tr>
<tr><td rowspan="2">B</td><td>14</td><td>7</td></tr>
<tr><td>15</td><td>0</td></tr>
</table>

非選擇題：

第一大題

(1) 【解法一】

因 $f(x)$ 是一個三次多項式函數， $f'(x)$ 必為二次多項式函數

由條件(i)可設 $f'(x)=kx(x-2)$ ，其中 $k>0$

$f(0), f(2)$ 分別為極大與極小值，且反曲點的橫坐標為 $x=1$

（極值發生處 0 與 2 的平均，或 $f''(x)=k(2x-2)=0$ 的解）

由條件(ii)知 $f'(1)=-3$ ，推得 $k=3$ ，故 $f'(x)=3x(x-2)$

【解法二】

設 $f(x)=ax^3+bx^2+cx+d$ ，微分得 $f'(x)=3ax^2+2bx+c$

由題設知 $f'(0)=0$ ，得 $c=0$ ，且 $f'(2)=0$ ，可得 $3a+b=0$

$f''(x)=6ax+2b$ ，得反曲點之 x 坐標為 $x=-\dfrac{b}{3a}$

由條件(ii)知 $f'(-\dfrac{b}{3a})=-3$ ，故得 $\dfrac{b^2}{3a}-\dfrac{2b^2}{3a}+c=-3$（亦即 $-\dfrac{b^2}{3a}=-3$ ）

解 $\begin{cases} 3a+b=0 \\ -\dfrac{b^2}{3a}=-3 \end{cases}$ 得 $a=1$ 、 $b=-3$ ，故 $f'(x)=3x^2-6x$

(2) 【解法一】

由(1)得 $f(x)=x^3-3x^2+k$ ，其中 k 為一常數，

由題設條件 $\int_0^2 f(x)dx=0$

即 $\int_0^2 (x^3-3x^2+k)\,dx=\left.\dfrac{1}{4}x^4-x^3+kx\right|_0^2=4-8+2k=0$ ，得 $k=2$

故 $f(x)=x^3-3x^2+2$

【解法二】

由(1)得 $f(x)=x^3-3x^2+k$,其中 k 為一常數

由題設條件 $\int_0^2 f(x)dx=0$ 以及 3 次函數圖形對反曲點對稱得知 $f(1)=0$，再解得 $k=2$ ，故知 $f(x)=x^3-3x^2+2$ 。

第二大題

(1) 由題設 $\begin{cases} a_{n+1}=\dfrac{\sqrt{3}}{2}a_n-\dfrac{1}{2}b_n \\ b_{n+1}=\dfrac{1}{2}a_n+\dfrac{\sqrt{3}}{2}b_n \end{cases}$，可推得 $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$。

故 $A=\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}$。

(2) $A^n=\begin{bmatrix} \dfrac{\sqrt{3}}{2} & -\dfrac{1}{2} \\ \dfrac{1}{2} & \dfrac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}^n=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

即 $\begin{bmatrix} \cos(30^\circ\cdot n) & -\sin(30^\circ\cdot n) \\ \sin(30^\circ\cdot n) & \cos(30^\circ\cdot n) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$，利用旋轉矩陣的概念，得 $n=12$

(3) 由於 $\begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix}=A\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}$，

得 $\begin{bmatrix} a_{100} \\ b_{100} \end{bmatrix}=A^{99}\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}=A^3\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$

解得 $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_{100} \\ b_{100} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$。故 $(a_1,b_1)=(2,-1)$。

解得 $(a_1,b_1)=(2,-1)$。