

第壹部分：選擇題（單選題、多選題及選填題共占 76 分）

一、單選題（占 30 分）

說明：第 1 題至第 5 題，每題有 5 個選項，其中只有一個是正確的選項，請畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題答對者，得 6 分；答錯、未作答或畫記多於一個選項者，該題以零分計算。

1. 設 $f(x) = 8x^3 - 4x - 1$ ，請問極限 $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{f(1+x^2) - f(1)}{x^2}$ 之值為下列哪個選項？

- (1) 0
- (2) 3
- (3) 12
- (4) 15
- (5) 20

2. 在 $\triangle ABC$ 中，已知 $\angle B = 60^\circ$ 、 $\angle C = 45^\circ$ ，且知 $\triangle ABC$ 之面積為 $3 + \sqrt{3}$ ，則其最短邊長為下列哪個選項？

- (1) $\frac{2\sqrt{2}}{3}$
- (2) $\sqrt{3}$
- (3) $\frac{3\sqrt{2}}{2}$
- (4) $2\sqrt{2}$
- (5) $2\sqrt{3}$

3. 坐標空間中有一長度為 17 的線段 \overline{AB} ，若 \overline{AB} 在 xy 平面、 yz 平面上正射影的長度分別為 11、 $12\sqrt{2}$ ，則 \overline{AB} 在 zx 平面上正射影的長度為下列哪個選項？
- (1) 11
 - (2) 12
 - (3) 13
 - (4) 14
 - (5) 15
4. 因應民眾對肉品安全的疑慮，某研究機構研發了一種毒物試劑，宣稱如果肉品內含有此種毒物，一定可以檢測出來，但是有 5% 的機率會將不含該毒物的肉品誤判為含有該毒物。假設已知某一批進口肉品，其中有 0.2% 含有此毒物，今隨機抽驗該批肉品中之一包，檢體被檢測出含有該毒物。若依該機構宣稱之檢測率，請問該檢體確實含有該毒物的機率 P 滿足下列哪個選項？
- (1) $P < 0.03$
 - (2) $0.03 \leq P < 0.04$
 - (3) $0.04 \leq P < 0.05$
 - (4) $0.05 \leq P < 0.1$
 - (5) $P \geq 0.1$

5. 當 (x, y) 在過 $A(2, 0)$ 、 $B(0, 3)$ 的直線上變動時，關於 $K = 8^x + 4^y$ 的敘述，請選出正確的選項。
- (1) K 有最大值 64、最小值 16
 - (2) K 有最大值 64、但沒有最小值
 - (3) K 沒有最大值、但有最小值 16
 - (4) K 沒有最大值、但有最小值 20
 - (5) K 沒有最大值也沒有最小值

二、多選題（占 32 分）

說明：第 6 題至第 9 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 8 分；答錯 1 個選項者，得 4.8 分；答錯 2 個選項者，得 1.6 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

6. 坐標平面上，直線 $x = a (a > 0)$ 與函數 $y = \log_2 x$ 、 $y = \log_4 x$ 的圖形分別交於點 A 、 B 。以 d_a 表示此兩點距離（即 \overline{AB} ），請選出正確的選項。
- (1) $d_2 = \frac{1}{2}$
 - (2) $d_8 = d_{\frac{1}{8}}$
 - (3) $d_3 + d_5 < 2$
 - (4) 對任意正數 a ， d_a 恆小於 8
 - (5) 若 r, s, t 三數皆大於 1 且成等比數列，則 $d_s = \frac{d_r + d_t}{2}$

7. 已知多項式 $f(x)$ 的函數圖形 $y=f(x)$ 通過 $(-2, 1)$ 、 $(-1, 3)$ 、 $(0, -2)$ 與 $(1, 3)$ ，請選出正確的選項。

- (1) $f(x)$ 是三次多項式
- (2) 能找到正實數 α 使得 $f(\alpha)=0$
- (3) 只能找到一個負實數 β 使得 $f(\beta)=0$
- (4) $f(x)$ 的函數圖形在點 $(0, -2)$ 之切線為水平線
- (5) $\int_{-1}^1 f'(x)dx = 0$

8. 關於函數 $f(x) = \sqrt{3}\cos x - \sin x$ ，其中 x 為任意實數，請選出正確的選項。

- (1) $f(x)$ 有最大值 $\sqrt{3}+1$
- (2) $f(x)$ 是一個週期函數，其最小正週期為 2π
- (3) $y=f(x)$ 的圖形對稱於直線 $x = -\frac{\pi}{6}$
- (4) $y=f(x)$ 的圖形與 x 軸的交點中，離原點最近的為 $(-\frac{\pi}{6}, 0)$
- (5) $y=f(x)$ 的圖形對稱於原點

9. 設實數 a, b, c, d 滿足 $a^2 + b^2 = 1$ 且 $(c-3)^2 + (d-4)^2 = 4$ ，請選出正確的選項。

- (1) $a(c-3) + b(d-4)$ 的最大值為 2
- (2) $ac + bd$ 的最大值為 8
- (3) 行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 的最大值為 7
- (4) 僅有一組 a, b, c, d 使得 $ac + bd$ 之值最大
- (5) 僅有一組 a, b, c, d 使得行列式 $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix}$ 之值最大

三、選填題（占 14 分）

說明：1. 第 A 與第 B 題，將答案畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」所標示的列號 (10-15)。

2. 每題完全答對給 7 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

A. 若坐標空間中通過點 $A(1, 3, 2)$ 、 $B(5, 2, 0)$ 且與直線 $\frac{x-1}{1} = \frac{y-2}{2} = \frac{z-3}{1}$ 平行的平面方程

式為 $ax + by + cz = 1$ ，則 $(a, b, c) = (\underline{\textcircled{10}}, \underline{\textcircled{11}\textcircled{12}}, \underline{\textcircled{13}})$ 。

- B. 同時擲一枚均勻硬幣與一顆公正骰子，若硬幣擲出正面，可得骰子點數的 30 倍獎金，若硬幣擲出反面，可得骰子點數的 10 倍獎金（單位：元）。則擲一次硬幣與骰子的獎金期望值為 14 15 元。

— — — — — 以下第貳部分的非選擇題，必須作答於答案卷 — — — — —

第貳部分：非選擇題（占 24 分）

說明：本部分共有二大題，答案必須寫在「答案卷」上，並於題號欄標明大題號（一、二）與子題號（(1)、(2)、(3)），同時必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分甚至給零分。作答務必使用筆尖較粗之黑色墨水的筆書寫，且不得使用鉛筆。每一子題配分標於題末。

一、設 $f(x)$ 為實係數三次多項式。已知

(i) 當 $0 < x < 2$ 時， $f'(x) < 0$ ；而 $f'(x) \geq 0$ 對所有其他 x 成立；

(ii) $f(x)$ 的圖形在反曲點的切線斜率為 -3 。

(1) 試求 $f'(x)$ 。(7 分)

(2) 若 $f(x)$ 又滿足 $\int_0^2 f(x)dx = 0$ ，試求 $f(x)$ 。(5 分)

二、坐標平面上有一序列的點 (a_1, b_1) 、 (a_2, b_2) 、 (a_3, b_3) 、 \dots ，已知

$$\begin{cases} a_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}a_n - \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{\sqrt{3}}{2}b_n \end{cases} \quad \text{對所有的正整數 } n=1,2,3,\dots \text{ 都成立。請回答下列問題。}$$

(1) 試求二階方陣 A 使得 $\begin{bmatrix} a_2 \\ b_2 \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$ 。(3 分)

(2) A 如(1)，試求最小正整數 n ，使得 $A^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 。(4 分)

(3) 若 $(a_{100}, b_{100}) = (1, 2)$ ，試求 (a_1, b_1) 。(5 分)