學科能力測驗（111 學年度起適用）
數學 A 考科參考試卷
試題解析

試題編號：1

參考答案：(2)

學科內容：N-10-2 絕對值

測驗目標：求解絕對值不等式。

試題解析：由 $|2x-13|\le 9 \Leftrightarrow -9\le 2x-13\le 9 \Leftrightarrow 2\le x\le 11$，得知：所求區間的長度為 9。

試題編號：2

參考答案：(5)

學科內容：S-11A-1 空間概念、G-11A-2 空間坐標系

測驗目標：利用空間中兩點的距離公式求點坐標。

試題解析：因 P 點在 xy 平面上，故可設 $P(x,y,0)$。

由 $\overline{PA}=\overline{PB}=13$，可列式：$\sqrt{(x-5)^2+y^2+12^2}=\sqrt{(x+5)^2+y^2+12^2}=13$

解得唯一解 $x=y=0$，故所求的 P 點坐標為 $(0,0,0)$。

試題編號：3

參考答案：(4)

學科內容：N-10-6 數列級數與遞迴關係、N-10-3 指數、N-10-4 常用對數

測驗目標：計算等比級數和，並估算數的大小。

試題解析：依題意推得這 30 天所獲得的錢為 $1+2+2^2+2^3+\cdots+2^{29}=\dfrac{2^{30}-1}{2-1}=2^{30}-1$，

以下提供兩個方法估計 2^{30}。

【解法一】：$2^{30}=(2^{10})^3=(1024)^3\approx(10^3)^3=10^9$。

【解法二】：$\log 2^{30}=30\times\log 2\approx 30\times 0.3010=9.030$，推得 2^{30} 為 10 位數。

故答案為選項(4)。

試題編號：4

參考答案：(5)

學科內容：N-10-4 常用對數、A-11A-4 對數律

測驗目標：結合指對數概念，評量對數的計算。

試題解析：由題意 $x_2 = 2x_1$，可得 $y_2 = 20\times\log(\frac{x_2}{2}) = 20\times\log\frac{2x_1}{2} = 20(\log 2 + \log\frac{x_1}{2}) = 20\times\log 2 + y_1$。

試題編號：5

參考答案：(2)

學科內容：G-11A-3 空間向量、G-11A-9 平面方程式、G-11A-10 空間中的直線方程式

測驗目標：評量空間直線參數式、直線與平面的交點。

試題解析：過點 $P(1,1,1)$ 沿著方向 $(1,2,2)$ 前進的直線參數式為 $\begin{cases} x = 1+t \\ y = 1+2t \\ z = 1+2t \end{cases}$，$t$ 為實數。

1. 此直線與平面 $x-y+3z=28$ 相交時，t 會滿足 $(1+t)-(1+2t)+3(1+2t)=28$，解得 $t=5$，即當 $t=5$ 時質點到達平面 $x-y+3z=28$ 上的點 $(6,11,11)$。所以每秒走 $|\vec{a}|=3$。

2. 因為 $|\vec{a}|=|\vec{b}|$，所以質點將從點 $(6,11,11)$ 沿方向 $(-2,2,-1)$ 走 s 秒的位置為直線參數式 $\begin{cases} x = 6-2s \\ y = 11+2s \\ z = 11-s \end{cases}$，$s$ 為實數，前進後碰到平面 $x=2$ 時，s 須滿足 $6-2s=2$，解得 $s=2$。

   故 $s=2$ 秒即為所求時間。

試題編號：6

參考答案：(5)

學科內容：A-11A-3 矩陣的運算、F-11A-3 矩陣的應用

測驗目標：評量線性變換的矩陣表示法及其性質。

試題解析：原直線的方向向量為 $(2,3)$ 映至斜率為 2 的直線，其方向向量為 $(1,2)$，

故由 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ a & -8 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 2 \\ 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 2a-24 \end{bmatrix}$ 與 $(1,2)$ 平行，得 $a=14$。也可取 L 上兩點，例如 $(1,1)$、$(3,4)$，被此線性變換分別送到點 $(1,a-8)$、$(3,3a-32)$。由此兩點決定的直線斜率為 2，可列式為 $2 = \frac{(3a-32)-(a-8)}{3-1}$，解得 $a=14$。

試題編號：7

參考答案：(4)

學科內容：D-10-4 複合事件的古典機率、D-11A-2 條件機率

測驗目標：結合機率概念應用在生活中的血液檢驗，評量檢驗次數之期望值。

試題解析：1. 9 件血液樣本所需要的檢驗次數可能 1 次或 10 次。其中若需要 1 次檢驗，表示這 9 件血液樣本都呈陰性反應，則其機率為 $(1-0.1)^9=0.9^9$；而若需要 10 次檢驗，表示這 9 件血液樣本中至少一件呈陽性反應，則其機率為 $1-(1-0.1)^9=1-0.9^9$ 。

2. 檢驗這 9 件血液樣本所需要的檢驗次數之期望值為 $1\times0.9^9+10(1-0.9^9)=10-9\times0.9^9$ 。

試題編號：8

參考答案：(2)(3)

學科內容：N-10-3 指數、N-10-4 常用對數、A-11A-4 對數律

測驗目標：評量指數、對數性質的應用。

試題解析：【解法一】

1. 依題設可知 $10^{10}\le ab<10^{11}$ 、 $10\le\frac{a}{b}<10^2$ ，

同取對數可得： $10\le\log_{10}a+\log_{10}b<11$ .... (i)

$1\le\log_{10}a-\log_{10}b<2$ .... (ii)

2. 由(i)(ii)兩式相加除以 2 得： $5.5\le\log_{10}a<6.5$ 。

3. 可知 a 為 6 位數或 7 位數。

【解法二】

1. 依題設可知： $10^{10}\le ab<10^{11}$ .... (i)

$10\le\frac{a}{b}<10^2$ .... (ii)

由(i)(ii)兩式相乘可得： $10^{11}\le a^2<10^{13}$ ，即 $10^{5.5}\le a<10^{6.5}$ 。

2. 可知 a 為 6 位數或 7 位數。

試題編號：9

參考答案：(3)(4)

學科內容：F-10-2 三次函數的圖形特徵

測驗目標：評量三次函數的對稱性概念及圖形的平移。

試題解析：選項(1)：$f(1)=2-6+10+k=5\Rightarrow k=-1$。

選項(2)：點 (r,s) 在 $y=f(x)$ 的圖形上的充要條件為點 $(2-r,10-s)$ 也在 $y=f(x)$ 的圖形上。

選項(3)：由題意可設 $f(x)=2(x-1)^3+b(x-1)+5$，比較係數後得 $b=4$。得 $f(x)=2(x-1)^3+4(x-1)+5$，可推得近似直線為 $y=4(x-1)+5$。

選項(4)：將 $y=f(x)$ 往左平移一單位，可得 $y=2x^3+4x+5$ 的圖形。

選項(5)：可以從圖形判斷沒有交點，也可解方程式 $2x^3-6x^2+10x-1=2x^3+4x+5$，即 $x^2-x+1=0$，方程式無實數解，判斷兩圖形沒有交點。

試題編號：10

參考答案：(1)(5)

學科內容：D-10-2 數據分析

測驗目標：判讀與處理一維數據。

試題解析：選項(1)：直接讀表，四個年齡範圍中，以 40~44 歲的失業率(13.17%)最高。

選項(2)：僅由失業率的高低，無法判讀哪一個年齡範圍的勞動力人數較多。

選項(3)：因為不知道 40~44 歲與 45~49 歲的勞動力人數是否相同，所以在計算 40~49 歲的失業率時，不可以直接取上述兩範圍的失業率的算術平均數。

選項(4)：一個年齡範圍失業率的改變，不見得是另一個年齡範圍失業率變化的原因。

選項(5)：【解法一】

如果 35~39 歲與 40~44 歲的勞動力人數相同，則 35~44 歲的失業率會是 9.80%與 13.17%的平均，即 11.485%。但 35~44 歲的失業率 12.66%，比 11.485%大，故 40~44 歲的勞動力人數較 35~39 歲為多。

【解法二】

假設 35~39 歲與 40~44 歲的勞動力人數分別有 m, n 人，

35~39 歲失業人數為 $9.8\%m$，40~44 歲失業人數為 $13.17\%n$，

且由失業率的定義知 35~44 歲失業率應為 $\dfrac{9.8\%m+13.17\%n}{m+n}=12.66\%$，

展開化簡後得 $9.8m+13.17n=12.66(m+n)$，整理得 $2.86m=0.51n$，

即勞動人數比 $m:n=0.51:2.86$，故得 40~44 歲的勞動力人數較多。

試題編號：11

參考答案：(2)(4)

學科內容：G-11A-1 平面向量

測驗目標：運用向量的加法及係數積的運算及線性組合的意涵來解決問題。

試題解析：$ABCD$ 是一平行四邊形，因此滿足 $\overrightarrow{AX}=p\overrightarrow{AB}+q\overrightarrow{AD}$ 的點 X 在 ΔBCD 的內部(不含邊界)

之充要條件為 $0<p<1$ ， $0<q<1$ 且 $p+q>1$ 。

(1) $\overrightarrow{AX}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ 的點 X 在邊 $\overline{BD}$ 上。

(2) $\overrightarrow{AX}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ 的點 X 在 ΔBCD 的內部。

(3) $\overrightarrow{AX}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AC}=\overrightarrow{AB}+\frac{2}{3}\overrightarrow{AD}$ 的點 X 在邊 $\overline{BC}$ 上。

(4) $\overrightarrow{AX}=\frac{1}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AC}=\frac{4}{5}\overrightarrow{AB}+\frac{3}{5}\overrightarrow{AD}$ 的點 X 在 ΔBCD 的內部。

(5) $\overrightarrow{AX}=\frac{2}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{BD}=\frac{1}{3}\overrightarrow{AB}+\frac{1}{3}\overrightarrow{AD}$ 的點 X 在 ΔABD 的內部，會在 ΔBCD 的外部。

試題編號：12

參考答案：(1)(3)

學科內容：F-11A-1 三角函數的圖形、F-11A-2 正餘弦的疊合

測驗目標：評量三角函數的疊合與其函數圖形。

試題解析： $f(\frac{\pi}{2})=\sqrt{3}\sin(\frac{\pi}{2})+\sin(\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2})=\sqrt{3}$ ，

$f(x)=\sqrt{3}\sin x+\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\sqrt{3}\sin x+\cos x=2\cos(x-\frac{\pi}{3})$ ，

故最大值為 2，最小值 -2 ，週期為 2π ，

圖形經過左 移 $\frac{\pi}{3}$ 會與 $y=2\cos x$ 重合。

試題編號：13

參考答案：(4)(5)

學科內容：G-10-2 直線方程式、G-10-3 圓方程式、G-10-4 直線與圓

測驗目標：評量坐標平面上圓、點與直線的距離關係與二元一次不等式。

試題解析：1. 設圓心為 (x,y)，半徑為 r。依題意 x,y 須滿足 $x^2+y^2>r^2$，$(x-2)^2+(y-6)^2<r^2$。由前兩式可得 $x^2+y^2>(x-2)^2+(y-6)^2$。所以 x,y 滿足不等式 $4x+12y-40>0$，化簡可得 $x+3y-10>0$。

2. 這個區域（ $x+3y-10>0$ ）與第二象限有交集；與第三象限無交集；與第一象限交集可到無窮遠處；與 x 軸交點的 x 坐標 $x>10$。事實上，直線 $x+3y-10=0$ 為兩點 $(0,0)$ 與 $(2,6)$ 連線段的中垂線。

3. 圓心可能在第四象限，此時圓心到 $(2,6)$ 的距離必大於點 $(10,0)$ 到 $(2,6)$ 的距離 10。

試題編號：14

參考答案：5

學科內容：D-10-3 有系統的計數

測驗目標：利用樹狀圖分類計數或列式解題。

試題解析：設選購 1 組踏板 x 元 、1 組輪架 1200 元及 2 組相同的滑輪各 y 元。

依題意得： $x+1200+2y\le 3000$ ，其中 $x\in\{300,400,500\}, y\in\{600,700\}$。

因此， $x+2y\le 1800$ 。當 $y=600$ 時， x 有 3 種選擇；當 $y=700$ 時， x 有 2 種選擇。故由加法原理，可有 5 種不同的搭配方式。

試題編號：15

參考答案： $a=1, b=4, c=1, d=-2$

學科內容：A-11A-2 三元一次聯立方程式

測驗目標：評量高斯消去法的運算。

試題解析：此方程組之增廣矩陣 $\begin{bmatrix}1&2&3&0\\2&1&3&6\\1&-1&0&6\\1&-2&-1&8\end{bmatrix}$，利用列運算，第一式乘 (-2) 加到第二式，第一式乘 (-1) 加到第三式，第一式乘 (-1) 加到第四式，

$$\begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&-3&-3&6\\0&-3&-3&6\\0&-4&-4&8\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&2&3&0\\0&1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}\to\begin{bmatrix}1&0&1&4\\0&1&1&-2\\0&0&0&0\\0&0&0&0\end{bmatrix}$$

，得 $a=1, b=4, c=1, d=-2$。

試題編號：16

參考答案：$3\sqrt{2}$

學科內容：G-10-7 三角比的性質

測驗目標：評量正弦與餘弦定理的應用。

試題解析：【解法一】

ΔABC 外接圓的半徑 $R=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$ 。令 $\overline{BC}=x$ 。

由餘弦定理，得 $\cos A=\dfrac{2^2+4^2-x^2}{2\times 2\times 4}=\dfrac{20-x^2}{16}$ 。

又由正弦定理，得 $\sin A=\dfrac{x}{2R}=\dfrac{\sqrt{7}x}{8\sqrt{2}}$ 。

因此，$1=\cos^2 A+\sin^2 A=\dfrac{(20-x^2)^2}{256}+\dfrac{7x^2}{128}=\dfrac{x^4-26x^2+400}{256}$ ，

即 $x^4-26x^2+144=0$ 。分解得 $(x^2-8)(x^2-18)=0$ ，故 $x^2=8$ 或 $x^2=18$ ，

可得 $x=2\sqrt{2}$ 或 $x=3\sqrt{2}$ 。當 $x=2\sqrt{2}$ 時， ΔABC 為鈍角三角形(其中 $\angle B$ 為鈍角)，

不合；而當 $x=3\sqrt{2}$ 時， ΔABC 為銳角三角形；故所求 $\overline{BC}=3\sqrt{2}$ 。

【解法二】

由外接圓的半徑 $R=\dfrac{4\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$ ，由正弦定理知 $\dfrac{2}{\sin C}=\dfrac{4}{\sin B}=2R=\dfrac{8\sqrt{2}}{\sqrt{7}}$ ，

所以 $\sin B=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{8}}\Rightarrow\cos B=\dfrac{1}{\sqrt{8}}$ ， $\sin C=\dfrac{\sqrt{7}}{\sqrt{32}}\Rightarrow\cos C=\dfrac{5}{\sqrt{32}}$ ，

推得 $\cos A=-\cos(B+C)=-\cos B\cos C+\sin B\sin C=-\dfrac{5}{16}+\dfrac{7}{16}=\dfrac{1}{8}$ ，

利用餘弦定理 $\cos A=\dfrac{1}{8}=\dfrac{2^2+4^2-\overline{BC}^2}{2\times 2\times 4}$ ，故 $\overline{BC}=3\sqrt{2}$ 。

試題編號：17

參考答案：$\frac{6}{25}$

學科內容：D-10-3 有系統的計數、D-10-4 複合事件的古典機率

測驗目標：結合整數點的奇偶性應用在打地鼠遊戲的情境，評量機率的計算。

試題解析：將25個格子點依奇偶性分成四類，使每一類中的任兩點之中點仍為格子點：

1. (x,y)為$(奇,偶)$: $A_1=\{(1,2),(1,4),(3,2),(3,4),(5,2),(5,4)\}$；
2. (x,y)為$(偶,奇)$: $A_2=\{(2,1),(2,3),(2,5),(4,1),(4,3),(4,5)\}$；
3. (x,y)為$(奇,奇)$: $A_3=\{(1,1),(1,3),(1,5),(3,1),(3,3),(3,5),(5,1),(5,3),(5,5)\}$；
4. (x,y)為$(偶,偶)$: $A_4=\{(2,2),(2,4),(4,2),(4,4)\}$

因此，所求的機率為$\frac{C_2^6+C_2^6+C_2^9+C_2^4}{C_2^{25}}=\frac{72}{300}=\frac{6}{25}$。

試題編號：18-19

參考答案：18.(1)(2)(3)(4)；19. 7 萬元

學科內容：A-10-2 多項式之除法原理、F-10-1 一次與二次函數、F-10-2 三次函數的圖形特徵

測驗目標：結合多項式函數應用在成本與獲利情境，利用因式定理找出函數模型，並能用配方法求二次函數的最大值。

試題解析：1. 因為$C(x)$是三次多項式函數，可設其首項係數為$k\neq 0$，故函數

$f(x)=C(x)-(18x-4g(x))$也是三次多項式函數，且首項係數為$k\neq 0$。

另一方面，由條件：$f(1)=f(2)=f(3)=0$及因式定理，可得：

$f(x)=k(x-1)(x-2)(x-3)$。

因此，$C(x)=k(x-1)(x-2)(x-3)+18x-4g(x)$。…..…….(*)

令$x=4$代入上式，得$51=C(4)=6k+72-4g(4)$，解得$g(4)=\frac{21+6k}{4}\neq\frac{21}{4}$(萬元)。

選項(4)利用$f(x)=0$的三根為$x=1,2,3$及三次多項式函數圖形特徵，當$k>0$時，$f(0)<0$且$f(4)>0$；而當$k<0$時，$f(0)>0$且$f(4)<0$；故可得$f(0)f(4)<0$。

2. 【解法一】

由(*)式以及題意所給 $C(x)=\frac{1}{2}x^3+x^2-\frac{1}{2}x+5$ 知 $k=\frac{1}{2}$ ，且

$$g(x)=\frac{1}{4}\left(k(x-1)(x-2)(x-3)+18x-C(x)\right)=-x^2+6x-2$$

$$=-(x-3)^2+7\le 7 \text{ ；}$$

即進貨 3 台儀器時，該經銷商可獲利的最大金額為 7 萬元。

【解法二】

設 $g(x)=ax^2+bx+c$ ，並以 $x=1,2,3$ 分別代入 $C(x)=18x-4g(x)$ ，得

$$\begin{cases} 6=C(1)=18-4(a+b+c) \\ 12=C(2)=36-4(4a+2b+c) \\ 26=C(3)=54-4(9a+3b+c) \end{cases} \text{。}$$

解得 $a=-1, b=6, c=-2$ ，即獲利函數 $g(x)=-x^2+6x-2$ 。

又 $g(x)=-x^2+6x-2=-(x-3)^2+7\le 7$ ，即進貨 3 台儀器時，該經銷商可獲利的最大金額為 7 萬元。