

大學入學考試中心 指定科目考試參考試卷

數學甲參考答案

選擇（填）題：

題號		答案
1		5
2		4
3		3
4		2
5		3
6		1,2,3,5
7		2,5
8		2,3
9		1,3,4,5
A	10	1
	11	—
	12	2
	13	3
B	14	7
	15	0

非選擇題：

第一大題

(1) 【解法一】

因 $f(x)$ 是一個三次多項式函數， $f'(x)$ 必為二次多項式函數

由條件(i)可設 $f'(x) = kx(x-2)$ ，其中 $k > 0$

$f(0), f(2)$ 分別為極大與極小值，且反曲點的橫坐標為 $x = 1$

(極值發生處 0 與 2 的平均，或 $f''(x) = k(2x-2) = 0$ 的解)

由條件(ii)知 $f'(1) = -3$ ，推得 $k = 3$ ，故 $f'(x) = 3x(x-2)$

【解法二】

設 $f(x) = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ，微分得 $f'(x) = 3ax^2 + 2bx + c$

由題設知 $f'(0) = 0$ ，得 $c = 0$ ，且 $f'(2) = 0$ ，可得 $3a + b = 0$

$f''(x) = 6ax + 2b$ ，得反曲點之 x 坐標為 $x = -\frac{b}{3a}$

由條件(ii)知 $f'(-\frac{b}{3a}) = -3$ ，故得 $\frac{b^2}{3a} - \frac{2b^2}{3a} + c = -3$ (亦即 $-\frac{b^2}{3a} = -3$)

$$\text{解} \begin{cases} 3a + b = 0 \\ -\frac{b^2}{3a} = -3 \end{cases} \text{得 } a = 1, b = -3, \text{ 故 } f'(x) = 3x^2 - 6x$$

(2) 【解法一】

由(1)得 $f(x) = x^3 - 3x^2 + k$ ，其中 k 為一常數，

由題設條件 $\int_0^2 f(x)dx = 0$

$$\text{即 } \int_0^2 (x^3 - 3x^2 + k)dx = \frac{1}{4}x^4 - x^3 + kx \Big|_0^2 = 4 - 8 + 2k = 0, \text{ 得 } k = 2$$

故 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$

【解法二】

由(1)得 $f(x) = x^3 - 3x^2 + k$ ，其中 k 為一常數

由題設條件 $\int_0^2 f(x)dx = 0$ 以及 3 次函數圖形對反曲點對稱得知 $f(1) = 0$ ，再解

得 $k = 2$ ，故知 $f(x) = x^3 - 3x^2 + 2$ 。

第二大題

$$(1) \text{ 由題設 } \begin{cases} a_{n+1} = \frac{\sqrt{3}}{2}a_n - \frac{1}{2}b_n \\ b_{n+1} = \frac{1}{2}a_n + \frac{\sqrt{3}}{2}b_n \end{cases}, \text{ 可推得 } \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix}.$$

$$\text{故 } A = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}.$$

$$(2) A^n = \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{3}}{2} & -\frac{1}{2} \\ \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}^n = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\text{即 } \begin{bmatrix} \cos(30^\circ \cdot n) & -\sin(30^\circ \cdot n) \\ \sin(30^\circ \cdot n) & \cos(30^\circ \cdot n) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \text{ 利用旋轉矩陣的概念, 得 } n = 12$$

$$(3) \text{ 由於 } \begin{bmatrix} a_{n+1} \\ b_{n+1} \end{bmatrix} = A \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix},$$

$$\text{得 } \begin{bmatrix} a_{100} \\ b_{100} \end{bmatrix} = A^{99} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = A^3 \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos 90^\circ & -\sin 90^\circ \\ \sin 90^\circ & \cos 90^\circ \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$$

$$\text{解得 } \begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{100} \\ b_{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}. \text{ 故 } (a_1, b_1) = (2, -1).$$

$$\text{解得 } (a_1, b_1) = (2, -1).$$