學科能力測驗（111 學年度起適用）
數學 B 考科參考試卷
試題解析

試題編號：1

參考答案：(4)

學科內容：S-11B-2 圓錐曲線

測驗目標：理解圓錐截痕的概念。

試題解析：光源所照射到的光線邊界為一圓柱(錐)，照射到地面可視為平面斜切圓柱(錐)的截痕，為一個橢圓。

試題編號：2

參考答案：(4)

學科內容：S-11B-1 空間概念

測驗目標：評量空間距離的概念。

試題解析：設 A、B 連線段的中點為 C，則 P 在過 C 與 $\overline{AB}$ 垂直的平面上，且 P 與 C 的距離為定值 $\frac{\sqrt{3}}{2}\overline{AB}$；顯然為一圓。

試題編號：3

參考答案：(2)

學科內容：D-10-3 有系統的計數

測驗目標：評量二項式定理的概念。

試題解析：由二項式定理：一般項為 $C_n^{12}p^n(-q)^{12-n}$，依此可推得

$n=9 \Rightarrow C_9^{12}p^9(-q)^3=-220p^9q^3$。

試題編號：4

參考答案：(5)

學科內容：F-10-1 一次與二次函數、F-10-3 多項式不等式

測驗目標：評量多項式圖形平移的概念及求解不等式。

試題解析：$f(x)=a(x-1)(x-2)$，$a>0$，由題意右移一個單位，可推得 $g(x)=a(x-2)(x-3)$。

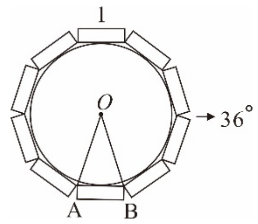
因此 $f(x)+g(x)=2a(x-2)^2\geq 0$ 的解為：x 為任意實數。

試題編號：5

參考答案：(4)

學科內容：G-10-6 三角比、G-10-7 三角比的性質

測驗目標：利用正切的定義求內切圓半徑。



試題解析：O 為內切圓圓心及正十邊形的中心，$\overline{AB}$ 為正十邊形的一邊。

由 $\angle AOB = 36°$，得內切圓半徑為 $\dfrac{1}{2\tan 18°}$。

試題編號：6

參考答案：(1)

學科內容：N-10-4 常用對數、F-11B-2 按比例成長模型

測驗目標：結合對數的概念應用在聲壓與聲音分貝的情境，評量指對數的計算。

試題解析：因為 $x>0$，根據題意可列出 $80 = 20\times\log(\dfrac{x}{2\times10^{-5}})$，則 $4=\log(\dfrac{x}{2\times10^{-5}})$，即 $10^4=\dfrac{x}{2\times10^{-5}}$。

因此，$x = 10^4\times2\times10^{-5} = 2\times10^{-1} = 0.2$。

試題編號：7

參考答案：(1)

學科內容：N-10-3 指數

測驗目標：結合指數的概念比較兩種 BMI 計算公式的差別。

試題解析：由題意新制 $\text{BMI}=\dfrac{1.3\times\text{體重(公斤)}}{\text{身高}^{2.5}\text{(公尺)}}$，舊制 $\text{BMI}=\dfrac{\text{體重(公斤)}}{\text{身高}^{2}\text{(公尺)}}$

$\dfrac{1.3\times\text{體重}}{\text{身高}^{2.5}} > \dfrac{\text{體重}}{\text{身高}^{2}} \Leftrightarrow \dfrac{1.3}{\text{身高}^{0.5}} > 1 \Leftrightarrow 1.3 > \text{身高}^{0.5} \Leftrightarrow 1.69 > \text{身高}$。

試題編號：8

參考答案：(4)

學科內容：G-10-6 三角比、G-11B-4 空間坐標系、S-11B-1 空間概念

測驗目標：結合經緯度的意義求球面上的點之空間坐標。

試題解析：先將所要求的點 P 投影到 xy 平面上的 P' 點，$\overline{OP}=r$，$\overline{OP'}=\dfrac{r}{2}$，$\overline{PP'}=\dfrac{\sqrt{3}r}{2}$ ，

又 $\overline{OP'}$ 與 x 軸正向夾 30 度角，由點 P' 在 x 軸與 y 軸的投影可知 $P'(\dfrac{\sqrt{3}}{4}r,\dfrac{1}{4}r,0)$ ，

因此，點 P 的坐標為 $(\dfrac{\sqrt{3}}{4}r,\dfrac{1}{4}r,\dfrac{\sqrt{3}}{2}r)$ 。

試題編號：9

參考答案：(1)(3)

學科內容：D-10-2 數據分析

測驗目標：解讀統計圖表並進行判斷。

試題解析：由試題所附折線圖判斷各選項

選項(1)：2003 年旅客數減少，其餘各年旅客數增加，可知 SARS 發生在 2003 年。

選項(2)：2011~2012 及 2013~2014 這兩條為最陡，2012 年旅客增加 $731-609=122$ 萬人，2014 旅客增加 $991-802=189$ 萬人。

選項(3)：將這 14 年的旅客人數由小排到大，中位數為第 7 位與第 8 位人數的平均數，即 $\dfrac{372+385}{2}=378.5<380$ 萬人。

選項(4)：成長率為 $\dfrac{991-802}{802}=\dfrac{991}{802}-1\approx 0.24$ 。

選項(5)：觀察圖形，成長率最大可能落在 2004、2010、2012、2014

2003~2004： $\dfrac{295-225}{225}=\dfrac{295}{225}-1\approx 0.31$

2009~2010： $\dfrac{557-440}{440}=\dfrac{557}{440}-1\approx 0.27$

2011~2012： $\dfrac{731-609}{609}=\dfrac{731}{609}-1\approx 0.20$

2013~2014： $\dfrac{991-802}{802}=\dfrac{991}{802}-1\approx 0.24$ ，

成長率最高為 2004 年。

試題編號：10

參考答案：(1)(4)(5)

學科內容：F-10-2 三次函數的圖形特徵

測驗目標：評量三次函數圖形的對稱性概念

試題解析：由題意 $f(0)=12$ 可推得 $f(0)=8a+4+16=12$ ，故 $a=-1$

選項(1)： $a=-1<0$

選項(2)： x^2 項係數為 $6a=-6\neq 0$

選項(3)：由 $f(x)=a(x+2)^3+2(x+2)+16$ ，可知對稱中心為 $(-2,16)$

選項(4)：因為對稱中心為 $(-2,16)$ 、又通過 $(0,12)$ ，所以 $(0,12)$ 對於對稱中心的對稱點為 $(-4,20)$ ，或直接求 $f(-4)$ 的值為 20

選項(5)：函數 $y=f(x)$ 在 $x=-2$ 附近的近似直線為 $y=2(x+2)+16$ ，其斜率為 2

試題編號：11

參考答案：(1)(2)(4)

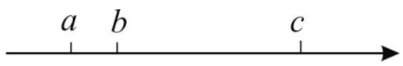
學科內容：N-10-1 實數、N-10-2 絕對值

測驗目標：評量實數、絕對值、數線、兩點距離與絕對值之關係

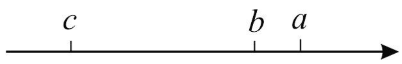
試題解析：三個相異實數 a 、 b 、 c 滿足 $b=\frac{4}{5}a+\frac{1}{5}c$ ，且將 a 、 b 、 c 標示在數線上。

選項(1)：由兩點所連成線段的分點公式可知 b 在 a 與 c 之間，如下圖：

(i) $a<c$ 時， $a<b<c$



(ii) $a>c$ 時， $a>b>c$



所以不管哪一種情況， b 總是在 a 與 c 之間。

選項(2)：因為 $|a-b|=\left|a-\frac{4}{5}a-\frac{1}{5}c\right|=\frac{1}{5}|a-c|$，所以 a 到 c 的距離是 a 到 b 的距離的 5 倍。

選項(3)：【解法一】

$2b-(a+c)=(\frac{8}{5}a+\frac{2}{5}c)-(a+c)=\frac{3}{5}a-\frac{3}{5}c=\frac{3}{5}(a-c)$ ，不能確定正或負。

【解法二】

$a+c>2b \Leftrightarrow \frac{a+c}{2}>b$ ，數線上 a 與 c 的中點必須在 b 的右側，此敘述未必正確。

選項(4)：【解法一】

由 $d=\frac{3}{4}a+\frac{1}{4}c=\frac{3}{4}(\frac{5b-c}{4})+\frac{1}{4}c=\frac{15}{16}b+\frac{1}{16}c$ ，可知 d 在 b 與 c 之間。

【解法二】

設 $A(a)$ 、 $B(b)$ 、 $C(c)$ 、 $D(d)$ ，由分點公式 $b=\frac{4}{5}a+\frac{1}{5}c$ ，得 $\overline{AB}:\overline{AC}=1:5$ ，

且由 $d=\frac{3}{4}a+\frac{1}{4}c$ ，得 $\overline{AD}:\overline{AC}=1:4$，可知 d 在 b 與 c 之間。

選項(5)：若 $e=\frac{4}{3}(\frac{5}{4}b-\frac{1}{4}c)-\frac{1}{3}c=\frac{5}{3}b-\frac{2}{3}c$ ，則 $b=\frac{3}{5}e+\frac{2}{5}c$ ，可知 b 在 e 與 c 之間。

試題編號：12

參考答案：(1)(2)(5)

學科內容：F-11B-1 週期性數學模型

測驗目標：評量正弦函數圖形的振幅與週期

試題解析：觀察數據，發現水深與時間有大約每 12 小時循環的週期性。最大水深為 15.2 公尺、最小水深為 9.8 公尺，所以，振幅為 $a=\frac{15.2-9.8}{2}=2.7$ 公尺。因此所求關係為 $h(t)=2.7\sin\frac{\pi}{6}t+12.5$ 。

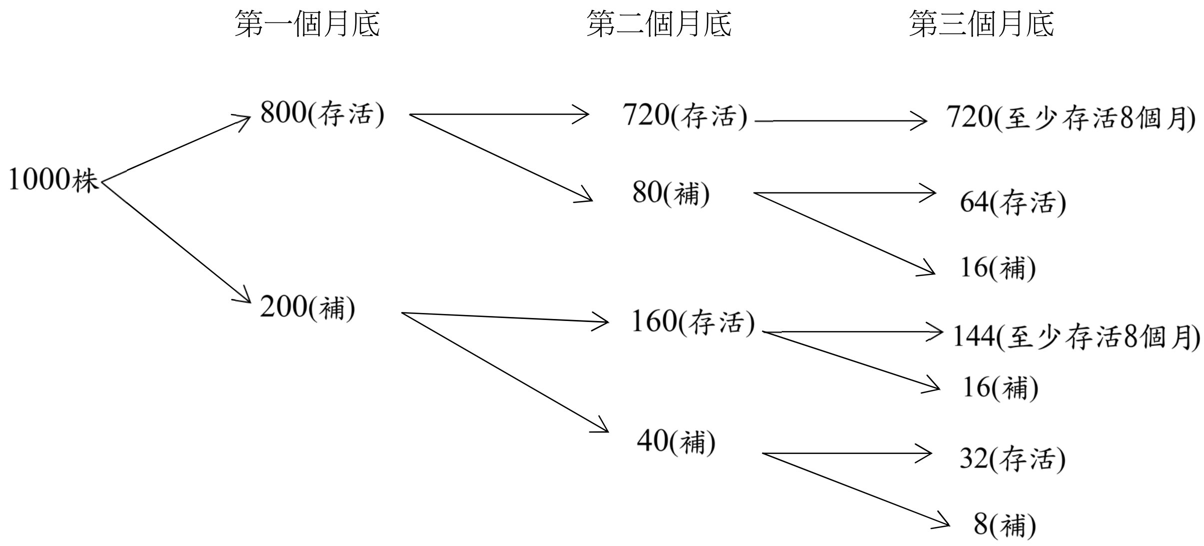
試題編號：13

參考答案：(1)(2)(3)(5)

學科內容：N-10-6 數列、級數與遞迴關係、F-11B-2 按比例成長模型

測驗目標：結合指數概念應用在造景植栽存活率的情境，評量比率的計算

試題解析：依題意繪出樹狀圖：



選項(1)：$1000\times(1-80\%)=200$ 株。

選項(2)：$1000\times80\%\times90\%+200\times80\%=720+160=880$ 株。

選項(3)：前三個月廠商補種的幼苗數量陸續為 200、120、40 株。

選項(4)：第三個月底能存活的植栽數量為

$1000\times80\%\times90\%+200\times80\%\times90\%+120\times80\%=960$ 株，

其中能存活 6 個月的植栽數量為

$1000\times80\%\times90\%+200\times80\%\times90\%+120\times80\%\times90\%$

$\geq 720+144+86=950$ 株。

第三個月底存活的植栽中，能存活到第六個月底的比率至少為

$\frac{950}{960}>95\%$。

選項(5)：第三個月底能存活至少 8 個月的植栽數量至少 950 株，且能存活的植栽數量逐月增加，故承包廠商可順利完成契約。

試題編號：14

參考答案：$\dfrac{9}{2}\pi$

學科內容：G-10-4 直線與圓、G-10-2 直線方程式

測驗目標：評量不等式圖形的判斷及求解圓面積

試題解析：因為圍成的區域為一個扁平的長方形，可判斷當Γ有最大半徑時需與較長的兩平行邊相切。因此，最大半徑為兩平行直線 $x-y=4$ 與 $x-y=-2$ 距離的一半，即為 $\dfrac{|-4-2|}{2\sqrt{1^2+(-1)^2}}=\dfrac{3}{\sqrt{2}}=\dfrac{3\sqrt{2}}{2}$，故圓$\Gamma$的面積為$\dfrac{9}{2}\pi$。

試題編號：15

參考答案：$\sqrt{29}$

學科內容：G-11B-1 平面向量、G-11B-2 平面向量的運算

測驗目標：評量平面向量長度的計算，畢氏定理及向量內積的概念

試題解析：【解法一】

由題意，$\vec{u}$ 、$\vec{v}$ 與 $\vec{u}+\vec{v}$ 可圍成直角三角形，$\vec{u}+\vec{v}$ 為其斜邊。故由畢氏定理知，$\left|\vec{v}\right|^2=\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2-\left|\vec{u}\right|^2=(4^2+(-7)^2)-6^2=16+49-36=29$。故$\left|\vec{v}\right|=\sqrt{29}$。

【解法二】

由內積與長度關係，知$\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2=(\vec{u}+\vec{v})\cdot(\vec{u}+\vec{v})=\left|\vec{u}\right|^2+2\vec{u}\cdot\vec{v}+\left|\vec{v}\right|^2$。

因$\vec{u}$ 和 $\vec{v}$ 垂直，所以$\vec{u}\cdot\vec{v}=0$；又$\vec{u}+\vec{v}=(4,-7)$，$\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2=4+(-7)^2=65$，$\vec{u}$ 的長度為 6，故$\left|\vec{u}+\vec{v}\right|^2=\left|\vec{u}\right|^2+\left|\vec{v}\right|^2$，得$\left|\vec{v}\right|=\sqrt{29}$。

試題編號：16

參考答案：$(3,\dfrac{1}{13})$

學科內容： A-11B-1 矩陣與資料表格

測驗目標：評量二階反方陣與矩陣乘積的概念

試題解析：由題幹「 A 的反方陣恰好是 B 的 c 倍」，可列式為 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = A\cdot(cB)$ ，

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -2 & x \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 3c & -2c \\ 2c & cx \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13c & 2cx-6c \\ 2cx-6c & cx^2+4c \end{bmatrix},$$

可得 $13c=1$ ， $c=\frac{1}{13}$ ， $2cx-6c=0$ ， $x=3$ 。

檢驗 $cx^2+4c=\frac{9}{13}+\frac{4}{13}=1$ ，解得數對 $(x,c)=(3,\frac{1}{13})$ 。

試題編號：17

參考答案： $\frac{3}{5}$

學科內容：D-11B-1 主觀機率與客觀機率、D-11B-2 不確定性

測驗目標：結合機率概念應用在生活中的情境

試題解析：【解法一】

依據題意所給行程，雨傘忘在便利商店的機率為 $\frac{1}{5}$ ，忘在公車上的機率為 $\frac{4}{5}\times\frac{1}{4}=\frac{1}{5}$ ，

忘在教室的機率為 $\frac{4}{5}\times\frac{3}{4}\times\frac{1}{3}=\frac{1}{5}$ ，合計 $\frac{3}{5}$ 。

【解法二】

$1-(1-\frac{1}{4})(1-\frac{1}{3})(1-\frac{1}{5})=1-\frac{2}{5}=\frac{3}{5}$ 。

試題編號：18-19

參考答案：18. (3)；19. 180

學科內容：D-10-3 有系統的計數

測驗目標：結合排列組合概念應用在服飾店的送貨路線情境，評量排列與組合的計算

試題解析：1. 依據題意， A 城市的分店到不同城市的每家分店之間必須設置一條快遞路線，而 A 城市的分店之間則不需要設置快遞路線，因此， A 城市中每家分店需要的快遞路線為 $3+2+2+2+3=12$ ，故選(3)。

2. 每個城市有三家分店，六個城市則共設 18 間分店，21 間分店僅餘 3 間分店可任意分配。滿足題意的分配方式有以下三種情況：

設店方式 1

分店數	3	6
城市數	5	1

設置 3 家分店的每個城市的每家分店需要 18 條快遞路線；設置 6 家分店的每個城市的每家分店需要 15 條快遞路線。

全部共需要快遞路線為 $\frac{1}{2}\times[5\times(3\times18)+1\times(6\times15)]=180$ 。

(或 $C_2^5\times3\times3+C_1^5\times C_1^1\times3\times6=180$ ；或 $C_2^{21}-5C_2^3-C_2^6=180$)

設店方式 2

分店數	3	4	5
城市數	4	1	1

全部共需要快遞路線為 $\frac{1}{2}\times[4\times(3\times18)+1\times(4\times17)+1\times(5\times16)]=182$ 。

(或 $C_2^4\times3\times3+C_1^4\times C_1^1\times3\times4+C_1^4\times C_1^1\times3\times5+C_1^1\times C_1^1\times4\times5=182$ ；或 $C_2^{21}-4C_2^3-C_2^4-C_2^5=182$)

設店方式 3

分店數	3	4
城市數	3	3

全部共需要快遞路線為 $\frac{1}{2}\times[3\times(3\times18)+3\times(4\times17)]=183$ 。

(或 $C_2^3\times3\times3+C_2^3\times4\times4+C_1^3\times C_1^3\times3\times4=183$ ；或 $C_2^{21}-3C_2^3-3C_2^4=183$)

經由上述討論說明，可以知道最少快遞路線為 180 條。