

106 年研究用試卷
 數學考科參考答案
 (卷一)

壹、選擇 (填) 答案

題號		答案
1		3
2		1,2
3		1,3,4
A	4	3
	5	5

貳、非選擇題

(1) $S(x) = |x - a_1| + |x - a_2| + \cdots + |x - a_7|$ 或寫成 $S(x) = \sum_{k=1}^7 |x - a_k|$ 。

(2) 【解法一】

$$\begin{aligned}
 S(a_i) - S(a_{i+1}) &= \sum_{k=1}^7 |a_k - a_i| - \sum_{k=1}^7 |a_k - a_{i+1}| = \sum_{k=1}^7 (|a_k - a_i| - |a_k - a_{i+1}|) \\
 &= \sum_{k=1}^{i-1} (|a_k - a_i| - |a_k - a_{i+1}|) + \sum_{k=i+2}^7 (|a_k - a_i| - |a_k - a_{i+1}|) \\
 &= \sum_{k=1}^{i-1} ((a_i - a_k) - (a_{i+1} - a_k)) + \sum_{k=i+2}^7 ((a_k - a_i) - (a_k - a_{i+1})) \\
 &= \sum_{k=1}^{i-1} (a_i - a_{i+1}) + \sum_{k=i+2}^7 (a_{i+1} - a_i) \\
 &= (i-1)(a_i - a_{i+1}) + (6-i)(a_{i+1} - a_i) \\
 &= (7-2i)(a_{i+1} - a_i) \begin{cases} > 0 & \text{當 } i \leq 3 \\ < 0 & \text{當 } i \geq 4 \end{cases}。
 \end{aligned}$$

因此， $S(a_1) > S(a_2) > S(a_3) > S(a_4) < S(a_5) < S(a_6) < S(a_7)$ 。亦即航行距離之和 $S(a_k)$ 在 $k=4$ 時有最小值，故應選擇第 4 個太空站 a_4 為轉運站。

【解法二】

令各間距分別為 $d_1 = a_2 - a_1, d_2 = a_3 - a_2, \dots, d_6 = a_7 - a_6$ 。則

$$\begin{aligned} S(a_1) &= |a_1 - a_2| + |a_1 - a_3| + |a_1 - a_4| + |a_1 - a_5| + |a_1 - a_6| + |a_1 - a_7| \\ &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_1) + (a_4 - a_1) + (a_5 - a_1) + (a_6 - a_1) + (a_7 - a_1) \\ &= 6d_1 + 5d_2 + 4d_3 + 3d_4 + 2d_5 + d_6。 \end{aligned}$$

同理， $S(a_2) = d_1 + 5d_2 + 4d_3 + 3d_4 + 2d_5 + d_6$ ，

$$S(a_3) = d_1 + 2d_2 + 4d_3 + 3d_4 + 2d_5 + d_6，$$

$$S(a_4) = d_1 + 2d_2 + 3d_3 + 3d_4 + 2d_5 + d_6，$$

$$S(a_5) = d_1 + 2d_2 + 3d_3 + 4d_4 + 2d_5 + d_6，$$

$$S(a_6) = d_1 + 2d_2 + 3d_3 + 4d_4 + 5d_5 + d_6，$$

$$S(a_7) = d_1 + 2d_2 + 3d_3 + 4d_4 + 5d_5 + 6d_6。$$

因為各間距 $d_k > 0$ ，比較各間距 d_k 的權數(係數)，發現 $S(a_4)$ 的權數都小於或等於其他 $S(a_k)$ 的權數。因此，航行距離之和 $S(a_k)$ 在 $k=4$ 時有最小值，故應選擇第 4 個太空站 a_4 為轉運站。

【解法三】

$$\begin{aligned} S(a_1) &= |a_1 - a_2| + |a_1 - a_3| + |a_1 - a_4| + |a_1 - a_5| + |a_1 - a_6| + |a_1 - a_7| \\ &= (a_2 - a_1) + (a_3 - a_1) + (a_4 - a_1) + (a_5 - a_1) + (a_6 - a_1) + (a_7 - a_1) \\ &= a_2 + a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 - 6a_1。 \end{aligned}$$

同理， $S(a_2) = a_3 + a_4 + a_5 + a_6 + a_7 - a_1 - 4a_2$ ，

$$S(a_3) = a_4 + a_5 + a_6 + a_7 - a_1 - a_2 - 2a_3，$$

$$S(a_4) = a_5 + a_6 + a_7 - a_1 - a_2 - a_3，$$

$$S(a_5) = 2a_5 + a_6 + a_7 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4，$$

$$S(a_6) = 4a_6 + a_7 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5，$$

$$S(a_7) = 6a_7 - a_1 - a_2 - a_3 - a_4 - a_5 - a_6。$$

由 $S(a_1) - S(a_2) = 5(a_2 - a_1) > 0$ ，得知： $S(a_1) > S(a_2)$ 。

由 $S(a_2) - S(a_3) = 3(a_3 - a_2) > 0$ ，得知： $S(a_2) > S(a_3)$ 。

由 $S(a_3) - S(a_4) = a_4 - a_3 > 0$ ，得知： $S(a_3) > S(a_4)$ 。

由 $S(a_4) - S(a_5) = -(a_5 - a_4) < 0$ ，得知： $S(a_4) < S(a_5)$ 。

由 $S(a_5) - S(a_6) = -3(a_6 - a_5) < 0$ ，得知： $S(a_5) < S(a_6)$ 。

由 $S(a_6) - S(a_7) = -5(a_7 - a_6) < 0$ ，得知： $S(a_6) < S(a_7)$ 。

因此， $S(a_1) > S(a_2) > S(a_3) > S(a_4) < S(a_5) < S(a_6) < S(a_7)$ 。亦即航行距離之和 $S(a_k)$ 在 $k=4$ 時有最小值，故應選擇第 4 個太空站 a_4 為轉運站。

106 年研究用試卷

數學考科參考答案

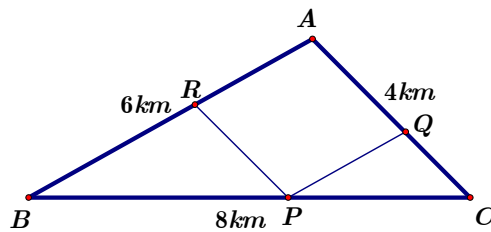
(卷二)

壹、選擇(填)答案

題號		答案
1		3
2		1,2,3,5
3		2,4
A	4	5
	5	9

貳、非選擇題

方案(1)



$$\because \overline{PR} \parallel \overline{CA}, \overline{PQ} \parallel \overline{BA} \quad \therefore \triangle BPR \sim \triangle BCA, \quad \triangle CPQ \sim \triangle CBA$$

且四邊形 ARPQ 為平行四邊形， $\overline{PQ} = \overline{PR}$

$$\Rightarrow \overline{BP} : \overline{BR} : \overline{PR} = \overline{BC} : \overline{BA} : \overline{CA} = 4 : 3 : 2$$

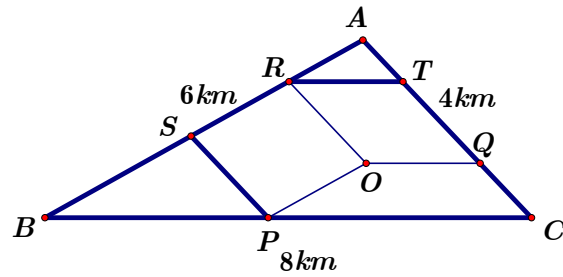
$$\text{設 } \overline{BP} = 4x, \overline{BR} = 3x, \overline{PR} = \overline{PQ} = \overline{AR} = \overline{AQ} = 2x,$$

$$\because \frac{\overline{PQ}}{\overline{CQ}} = \frac{\overline{BA}}{\overline{CA}} \quad \therefore \frac{2x}{4-2x} = \frac{6}{4}$$

$$\Rightarrow x = \frac{6}{5}$$

$$\Rightarrow \overline{PR} + \overline{PQ} = 4x = \frac{24}{5} = 4\frac{4}{5} (\text{km})$$

方案(2)



過 P 做 \overline{AC} 平行線交 \overline{AB} 於 S ，過 R 做 \overline{BC} 平行線交 \overline{AC} 於 T ，

則 $\triangle BPS \sim \triangle BCA$ ， $\triangle ART \sim \triangle ABC$ ，

四邊形 $OPSR$ 與四邊形 $ORTQ$ 皆為平行四邊形

$\overline{BP} : \overline{BS} : \overline{PS} = \overline{BC} : \overline{BA} : \overline{CA} = 4 : 3 : 2$ ，

設 $\overline{BP} = 4x$ ， $\overline{BS} = 3x$ ， $\overline{PS} = 2x$ ，

$\therefore \overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{OR} \therefore \overline{PS} = \overline{SR} = \overline{RT} = \overline{TQ} = \overline{OP} = \overline{OQ} = \overline{OR} = 2x$

$\Rightarrow \overline{AR} = \overline{AB} - \overline{BR} = 6 - 5x$ ，

$\therefore \triangle ART \sim \triangle ABC \therefore \frac{\overline{AR}}{\overline{RT}} = \frac{\overline{AB}}{\overline{BC}} \Rightarrow \frac{6-5x}{2x} = \frac{6}{8} = \frac{3}{4}$ ，

$\Rightarrow x = \frac{12}{13}$

$\overline{OP} + \overline{OQ} + \overline{OR} = 6x = \frac{72}{13} = 5\frac{7}{13} (km)$

結論： $\therefore \frac{24}{5} < \frac{72}{13} \therefore$ 方案(1)的造價總成本較低

106 年研究用試卷

數學考科參考答案

(卷三)

壹、選擇(填)答案

題號		答案
1		1,3,5
2		2
3		1,5
A	4	6
	5	2
	6	5

貳、非選擇題

【解法一】

1. 算出 S 國幣的分攤金額

$$\text{小玉：} \frac{822}{3} + \frac{516}{3} = 446 \quad (\text{S 國幣}),$$

$$\text{小豪：} \frac{822}{3} + \frac{516}{3} + \frac{952}{2} = 992 \quad (\text{S 國幣})$$

$$\text{阿誠：} \frac{822}{3} + \frac{516}{3} + \frac{952}{2} = 992 \quad (\text{S 國幣})$$

2. 將 S 國幣換算成新臺幣

$$\text{小玉：} 446 (\text{S 國幣}) \times 22.5 = 10035 (\text{新臺幣})$$

$$\text{小豪：} 922 (\text{S 國幣}) \times 22.5 = 20745 (\text{新臺幣})$$

$$\text{阿誠：} 922 (\text{S 國幣}) \times 22.5 = 20745 (\text{新臺幣})$$

【解法二】

1. 先將支出金額換算成新臺幣

$$822 (\text{S 國幣}) = 822 \times 22.5 = 18495 (\text{新臺幣})$$

$$516 (\text{S 國幣}) = 516 \times 22.5 = 11610 (\text{新臺幣})$$

$$952 (\text{S 國幣}) = 952 \times 22.5 = 21420 (\text{新臺幣})$$

2. 算出新臺幣的分攤金額

$$\text{小玉} : \frac{18495}{3} + \frac{11610}{3} = 10035 \quad (\text{新臺幣})$$

$$\text{小豪} : \frac{18495}{3} + \frac{11610}{3} + \frac{21420}{2} = 20745 \quad (\text{新臺幣})$$

$$\text{阿誠} : \frac{18495}{3} + \frac{11610}{3} + \frac{21420}{2} = 20745 \quad (\text{新臺幣})$$

106 年研究用試卷

數學考科參考答案

(卷四)

壹、選擇(填)答案

題號		答案
1		4
2		4
3		1,2,3,5
A	4	3
	5	6

貳、非選擇題

$$(1) \begin{cases} 15x + 20y + 25z = 200 \\ x + y + z = 10 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 3x + 4y + 5z = 40 \\ x + y + z = 10 \end{cases}$$

$$(2) \begin{cases} x = t \\ y = 10 - 2t, 0 \leq t \leq 5, t \in \mathbb{Z} ; \\ z = t \end{cases}$$

$$(3) (x, y, z) = (0, 10, 0)$$

即 (40 元的 2 小時, 40 元的 0.5 小時, 40 元的 2.5 小時)

(40 元的 2 小時, 40 元的 1 小時, 40 元的 2 小時)

(40 元的 2 小時, 40 元的 1.5 小時, 40 元的 1.5 小時)

$(x, y, z) = (1, 8, 1)$ 時, 無解。

$$(x, y, z) = (2, 6, 2)$$

即 (40 元的 2 小時, 累積費率 2 小時, 50 元的 1 小時)

(40 元的 2 小時, 累積費率 2.5 小時, 50 元的 0.5 小時)

$$(x, y, z) = (3, 4, 3)$$

即 (40 元的 2 小時, 30 元的 1.5 小時, 50 元的 1.5 小時)

$$(x, y, z) = (4, 2, 4)$$

即 (30 元的 2 小時, 40 元的 1 小時, 50 元的 2 小時)

(50 元的 2 小時, 30 元的 1 小時, 累積費率 2 小時)

$$(x, y, z) = (5, 0, 5)$$

即 (30 元的 2 小時, 30 元的 0.5 小時, 50 元的 2.5 小時)

(50 元的 2 小時, 30 元的 2.5 小時, 50 元的 0.5 小時)

共 10 組。

106 年研究用試卷

數學考科參考答案

(卷五)

壹、選擇(填)答案

題號		答案
1		2
2		1
3		2,3,4
A	4	0
	5	8

貳、非選擇題

(1) 由圖觀察成長率較高的年份為

$$2010 \text{ 年成長率} = (557 - 440) \div 440 \approx 0.27$$

$$2012 \text{ 年成長率} = (731 - 609) \div 609 \approx 0.20$$

$$2014 \text{ 年成長率} = (991 - 802) \div 802 \approx 0.24$$

$$2004 \text{ 年成長率} = (295 - 225) \div 225 \approx 0.31$$

經比較，以 2004 年成長率最高，成長率約為 0.31

(2) 2014 年男性旅客數約為 $991 \times 47.6\% \approx 471.7$ 萬人

2013 年男性旅客數約為 $802 \times 49.7\% \approx 398.6$ 萬人

2014 年男性旅客數比 2013 年增加 $991 \times 47.6\% - 802 \times 49.7\%$ ，
即約增加 $471.7 - 398.6 = 73.1$ 萬人

106 年研究用試卷

數學考科參考答案

(卷六)

選擇(填)答案

題號		答案
1		4
2		4
3		4
4		5
5		1,2,4,5
6		1,5
7		2,4
A	8	2
	9	8