

編者按：選才電子報第 180 期「98 指考各考科非選擇題評分標準說明」中，數學乙部分主要依據閱卷評分原則，針對部分考生為何明明答案正確，卻未能得到滿分甚至 1 分未得的情況加以說明。而本期之內容則是分析抽樣試卷（約七百份左右），整理考生作答情形，羅列出現的解法及錯誤作答類型，輔以統計值分析，以釐清部分考生作答之盲點。期許本文能提供教師教學及學生學習之參考，也歡迎關心高中數學教學之各界，不吝指教。

98 指考數學乙非選擇題作答情形分析

第一處 陳慧美

數學乙非選擇題的測驗目標為評量考生是否瞭解題意，建立數學模型，經由正確的推理與計算，以解決問題。因此，在評閱考生試卷時所考量的是，考生能否將文字轉化成數學式，再由所學的知識中找出相關的數學策略作答，最後能完整且正確寫出答案者，方可得滿分，否則僅能得到部分分數。表一列出 94 至 98 年數學乙非選擇題得零分及滿分的考生人數及人數百分比。由表中可看出 98 年的零分人數百分比為 34%，較 97 年的零分人數百分比多，但由歷年來看，96 年的零分人數百分比才是最高的一年；再由表中可知今年數學乙非選擇題得滿分的人數百分比為 1.8%，與 97 年相比減少許多，再由歷年來看，98 年的滿分人數百分比雖不是最低的，但亦不算高。

表一、94 至 98 年數學乙非選擇題零分、滿分統計表

年度	零分		滿分	
	人數	百分比	人數	百分比
98	24,201	34%	1,259	1.8%
97	19,505	25%	7,214	9.1%
96	31,953	37%	2,203	3%
95	9,798	10%	9,709	10%
94	31,808	33%	773	0.8%

為了解數學乙考生可能的作答情形，我們從 98 年數學乙考生群中隨機抽樣了 701 名考生的答案卷進行分析。至於各題的正確解法，可詳見選才電子報第 180 期「98 指考各考科非選擇題評分標準說明」中的數學乙非選擇題考生作答情形分析。

【第一題題目】

某製造玩具工廠，每次接到訂單都需開模 5 萬元，製造每一千個玩具材料費需 2 萬元，由此建立生產的基本成本函數 $f(x) = 5 + 2x$ ，其中 x 以千個為單位。依過去經驗，接到訂單數量與報價總值有如下關係：

數量(千個)	報價總值(萬元)
5	37.5
10	70
15	97.5

以此資料建立一個二次函數的報價總值函數 $g(x)$ ，以及獲利函數 $h(x) = g(x) - f(x)$ 。

- (1) 若接到訂單為 20 千個，試問交貨時，每千個玩具的基本成本平均是多少萬元？(2 分)
 (2) 試求報價總值函數 $g(x)$ 。(7 分)
 (3) 根據 $h(x)$ ，試問訂單數量是多少時，獲利總值最高？(5 分)

試題統計值：

項目	平均得分(得分率)	標準差
統計值	3.69 (26.36%)	5

說明：

此次數學乙非選擇題的第一題分為三小題，其中第(1)小題欲評量考生能否瞭解平均的概念，此題的正確解法為：能正確將 $x = 20$ 代入 $f(x) = 5 + 2x$ 後，再求出每千個的基本成本平均為

$$\frac{f(20)}{20} = \frac{45}{20} = 2.25 \text{ (萬元/千個)}。$$

在 98 數學乙考生群中，我們抽樣 701 名考生答案卷進行作答分析，如下：

表二、數學乙非選擇題第一題第(1)小題作答情形統計

第一題第(1)小題作答類型	人數	百分比
未答	91	13.0%
有寫一些跟答案無關的內容，可看出不知該如何作答	29	4.1%
完全正確，即寫出 2.25 萬元	398	56.8%
僅算出 $f(x) = 5 + 2x$ 之值 (或 x 以 20 代入得 $5 + 2 \times 20 = 45$)	137	19.5%
算錯 $f(x) = 5 + 2x = 45$ 之值。	10	1.4%
其他	37	5.3%

由第(1)小題的分析可看出，有一成多的考生連下筆作答都不願意就直接放棄；另有 4.1% 的考生寫一些與答案無關的內容，但可看出不知該如何作答。抽樣中有 56.8% 的考生能完全作對，即先算出 $f(20)$ 值後，再求出 $\frac{f(20)}{20} = 2.25$ 。有 19.5% 的考生因僅算出 $f(20) = 45$ 之值，但未將 $f(20)$ 除以 20，因而無法得分；另有 1.4% 的考生則知道要算 $f(20)$ 之值，但無法正確求解 $f(20)$ ，例如將 $f(20)$ 之值寫成 $f(20) = 5 + 400 = 405$ 或 $f(20) = 5(\text{萬}) + 2 \cdot 20(\text{千}) = 90000 \dots$ 等；至於其他錯誤情況，有考生是利用 5 千個的總值是 37.5 萬、10 千個的總值是 70 萬、15 千個的總值是 97.5 萬，依序增加了 32.5 萬、27.5 萬，因此當 20 千個時，會增加 22.5 萬，即 120 萬元...等作法，這些考生在該小題中，因無法將文字轉化成正確數學式，故無法得分。

第(2)小題欲評量考生能否正確的列式與求出該函數，此題的正確作法為能正確列式，如：設為 $g(x) = ax^2 + bx + c$ 或 $g(x) = a(x - c)^2 + d$ ，或 $g(x) = a(x - 5)(x - 10) + b(x - 10) + 70$ ，之後再將題幹中的數量與報價總值代入函數求解，以得正確方程式。

表三為第(2)小題的分析，表中看出有 26.4% 未答，另有 7% 則是寫一些與答案無關的內容，但可看出不知該如何作答。抽樣中有 30.5% 考生能完全寫對，表示這些考生除了能正確列式外，亦可將訂單數量與報價總值代入函數求解。

表三、數學乙非選擇題第一題第(2)小題作答情形統計

第一題第(2)小題作答類型	人數	百分比
未答	185	26.4%
有寫一些跟答案無關的內容，可看出不知該如何作答	49	7.0%
【法一】設 $g(x) = ax^2 + bx + c$	233	33.2%
完全正確，即求得正確 $a = -\frac{1}{10}, b = 8, c = 0$ 之值	193	27.5%
能列出三個正確聯立方程組，但解 a, b, c 時出錯	30	4.3%
無法列出三個正確聯立方程組	10	1.4%
【法二】設 $g(x) = (8 - \frac{1}{10}x)x$ 或 $g(x) = x(7.5 - 0.1(x - 5))$	28	4%
完全正確	18	2.6%
直接寫成 $g(x) = 8x - 0.1x^2$ ，無任何計算過程	10	1.4%
【法三】設 $h(x) = ax^2 + bx + c$	3	0.4%
完全正確。即解得 $a = -\frac{1}{10}, b = 6, c = -5$ ，且寫出正確的 $g(x)$	2	0.3%
無法列出三個正確聯立方程組	1	0.1%
【法四】設 $g(x) = ax^2 + bx$	5	0.7%
完全正確，即代入三個數值列出三個正確方程組，並得 a, b 之值	1	0.1%
只代入二個數值列出二個正確方程組，但得 a, b 之值	1	0.1%
能列出二個正確方程組，但無法得到 a, b 之值	3	0.4%
設成一次式或其他方程式	116	16.5%
利用窮舉法求解 $g(x)$	84	12.0%

就表三來看，考生在列式時會採取的方程式有四種。其中有 33.2% 考生在列式上採取【法一】，假設 $g(x)$ 為 $ax^2 + bx + c$ ，有 27.5% 能正確求解，但有 5.7% 的考生因粗心而解錯 a 、 b 、 c 之值，或無法列出三個正確聯立方程組而只能得到部分分數，實在可惜。另有 4% 的考生則是採取【法二】，利用當訂單為 0 時，報價應為 0，故對於 $x > 0$ 、 $\frac{g(x)}{x}$ 為線性函數，再利用所給數據解得 $g(x) = x(7.5 - 0.1(x - 5))$ 。不過，有 1.4% 的考生因未寫出任何計算過程，僅寫出 $g(x) = 8x - 0.1x^2$ ，實在無法從卷中得知其作法為何，而試卷非選擇題的說明指出：「必須寫出演算過程或理由，否則將予扣分」，因此這類考生無法得到該小題的滿分。另有 0.4% 的考生則是採取【法三】，設 $h(x) = ax^2 + bx + c$ ，不過僅有 0.3% 的考生正確求解得 $a = -\frac{1}{10}$ 、 $b = 6$ 、 $c = -5$ ，且寫出正確的 $g(x)$ 。有 0.7% 的考生是利用【法四】求解，認為「當訂單數量為 0 時，報價總值就應該是 0 元」，因此直接設函數 $g(x) = ax^2 + bx$ ，接著只用兩個題幹假設條件就解出 $g(x)$ ，所得答案雖然正確，但 0.1% 考生未檢驗所得 $g(x)$ 確實滿足解題時未用的另一題幹假設條件，這在數學解題上是錯誤的，因此這些考生雖答案正確，卻無法得到該小題的滿分。此外，令人感到訝異的是，題幹上提及「一個二次函數的報價總值函數 $g(x)$ 」，卻有 16.5% 的考生將 $g(x)$ 設成一次式，如：設成 $g(x) = 6.5x + 5$ ，另有 12% 考生欲利用窮舉法求解亦犯了相同的錯誤，即一開始並未假設二次函數的型式，且後續的推論不正確，因此一分未得。

第(3)小題欲評量二次多項式的最大值，正確的解題步驟有二，步驟一利用第(2)小題中的 $g(x)$ ，減去 $f(x)$ 後，可得 $h(x)$ 。步驟二再利用配方法或公式解 ($x = -\frac{b}{2a}$) 求得：當 $x = 30$ 時獲利總值最高。

表四為第(3)小題的分析，表中可看出有近四成的考生一字未寫，有 6.3% 的考生則是寫一些跟答案無關的內容，看得出不知該如何作答。抽樣中有 27% 的考生能完全寫對，即表示這些考生可得正確的 $h(x)$ ，接著再利用相關的數學策略求解出當 x 為 30 時會有最大值。

表四、數學乙非選擇題第一題第(3)小題作答情形統計

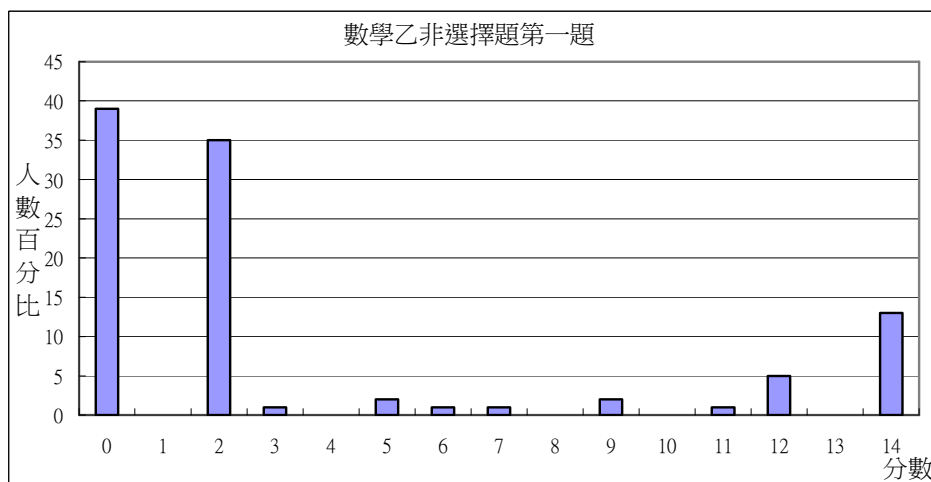
第一題第(3)小題作答類型	人數	百分比
未答	277	39.5%
有寫一些跟答案無關的內容，可看出不知該如何作答	44	6.3%
【法一】利用配方法	145	20.7%
正確求解。即以正確 $h(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 6x - 5$ 配方求解，得 $x = 30$	140	20.0%
以正確的 $h(x)$ 配方法求解，但 x 並非為 30	5	0.7%
【法二】利用 $x = -\frac{b}{2a}$ 代值	6	0.9%
正確求解。以正確的 $h(x)$ ，利用 $x = -\frac{b}{2a}$ ，求得 $x = 30$	6	0.9%

第一題第(3)小題作答類型	人數	百分比
【法三】利用微分求解	47	6.7%
正確求解。以正確的 $h(x)$ 微分，求得 $x = 30$	44	6.3%
以正確的 $h(x)$ 微分，但求得 x 並非為 30	3	0.4%
無法求得正確的 $h(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 6x - 5$ ，或 $h(x) = -\frac{1}{10}x^2 + 8x - (5 + 2x)$	93	13.3%
列舉	52	7.4%
其他	33	4.7%

在求出 $h(x)$ 後，需求解 x 為多少時，獲利總值最高，有 20.7% 的考生採【法一】，即配方法求解，不過有約 0.7% 的考生因計算錯誤，以致無法求到正確的 x 值，僅能得到部分分數；有 6.7% 的考生，則是利用【法三】微分求解，但有 0.4% 的考生因微分時計算錯誤，使得所求的 x 值並非為 30；有 0.9% 的考生是利用【法二】公式解（ $x = -\frac{b}{2a}$ ）求得 $x = 30$ 時獲利總值最高。

有 13.3% 的考生因在第(2)小題未算出正確 $g(x)$ 函數，以致於該小題無法求得正確的函數 $h(x)$ ，因而無法得分。此外，有 7.4% 考生未求出 $h(x)$ ，僅利用題目的訂單數量、報價總值及成本函數列舉出數個數據，比較得 $x = 30$ 時獲利最高，此解法因未能確實說明為何 $x = 30$ 時獲利最高，且從數據中亦無法看出 $h(x)$ 的函數形式，因此未能得到任何分數。

至於其他錯誤情況，有考生僅得出函數 $h(x)$ ，但未求出 $x = 30$ 時獲利總值最高，或寫出 $h(x)$ 後，直接寫 $x = 30$ 時獲利總值最高，無任何計算或說明，故僅能得部分分數。



圖一、數學乙第一題的考生成績分布圖

圖一為數學乙全體考生於非選擇題第一題的成績分布圖，其中以 0、2、5、9、12、14 分的考生居多，可將各分數所對應的考生群區分如下：

得 0 分者：未答，不知該如何下手作答。

得 2 分者：能求解出第(1)小題，或第(1)小題求錯，但第(2)小題可代值列出二個正確聯立方程式。

得 5 分者：能求解出第(1)小題，且於第(2)小題可代值列出三個正確聯立方程式。

得 9 分者：能正確求解第(1)與第(2)小題，但無法求解第(3)小題。

得 12 分者：能正確求解第(2)與第(3)小題，但無法正確求解第(1)小題。

得 14 分者：能正確求解第(1)、(2)、(3)小題。

由以上敘述可知此題主要鑑別的考生能力群為 0、2、5、9、12、14 分。其中得零分的人約 39%，得 2 分的考生約 35%，得 5 分的考生約 2%，得 9 分的考生約 2%，得 12 分的考生約 5%，約 13% 的考生能完全作對。

【第二題題目】

設有 A、B 兩支大瓶子，開始時，A 瓶裝有 a 公升的純酒精，B 瓶裝有 b 公升的礦泉水。每一輪操作都是先將 A 瓶的溶液倒出一半到 B 瓶，然後再將 B 瓶的溶液倒出一半回 A 瓶（不考慮酒精與水混合後體積的縮小）。設 n 輪操作後，A 瓶有 a_n 公升的溶液，B 瓶有 b_n 公升的溶液。已知二階方陣 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 滿足

$$\begin{bmatrix} a_n \\ b_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}^n \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}。$$

(1) 求二階方陣 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 。(5 分)

(2) 當 $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}$ 時，求 a_{100} 及 b_{100} 。(4 分)

(3) 當 $a = \frac{2}{3}, b = \frac{1}{3}$ 時，在第二輪操作後，A 瓶的溶液中有百分之多少的酒精？(5 分)

試題統計值：

項目	平均得分(得分率)	標準差
統計值	2.1 (15%)	3.72

說明：

98 數學乙非選擇題的第二大題亦分為三小題，其中第(1)小題欲評量考生能否將溶液操作過程以矩陣表示。正確的解題步驟有二，步驟一先算出當溶液操作一輪後， a_1 與 b_1 的溶液中含有多少 a 與 b ，步驟二再將 $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$ 以 $\begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ 表示，求出 $\begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ 之值。

表五、數學乙非選擇題第二題第(1)小題作答情形統計

第二題第(1)小題作答類型	人數	百分比
未答	269	38.4%
有寫一些跟答案無關的內容，可看出不知該如何作答	126	18.0%
完全正確，即寫出 a_1 與 b_1 值後，再寫出正確矩陣 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$	181	25.8%
直接寫出 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ，無任何計算過程	21	3.0%
寫出 a_1 與 b_1 值後，卻將矩陣寫成 A 的轉置	7	1.0%
無法正確寫出 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ ，從操作過程中可看出 $a_1 = \frac{3}{4}a + \frac{b}{2}$ 與 $b_1 = \frac{a}{4} + \frac{b}{2}$ 之值，如： $\begin{bmatrix} a & \frac{3}{4}a + \frac{1}{2}b \\ b & \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b \end{bmatrix}$ 或 $\begin{bmatrix} a & b \\ \frac{3}{4}a + \frac{1}{2}b & \frac{1}{4}a + \frac{1}{2}b \end{bmatrix}$	34	4.9%
一開始就算錯 a_1 與 b_1 之值。	53	7.6%
其他	9	1.3%

由表五中可知，有 38.4% 的考生一個字都不願作答，直接放棄；另有 18% 的考生則寫一些與答案無關的內容，但可看出不知該如何作答；由此可知，有 56.4% 的考生對於此題採放棄態度。在此小題中，有 25.8% 的考生可寫出 a_1 與 b_1 後，再寫出正確矩陣 $\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$ 。

有 4.9% 的考生僅將 a_1 與 b_1 以 a, b 表示，而無法將 $\begin{bmatrix} a_1 \\ b_1 \end{bmatrix}$ 以 $\begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$ 表示，與有 1% 的考生雖寫出 a_1 與 b_1 值，卻將矩陣寫成 A 的轉置者，皆只能得到該小題的部分分數。有 3% 的考生直接寫出正確的 $\begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ 之值，而無任何演算過程或理由，依據非選擇題之說明予以扣分，故無法得到此小題的滿分，僅能得到部分分數。此外，有 7.6% 的考生一開始便將 a_1 與 b_1 值算錯，可知這群考生在將文字轉化成數學式時有困難，以致在該小題無法得到任何分數。至於其他錯誤情況，有考生會將 a, b 代入某特定值，但因其推論有誤，以至無法得分。

第(2)小題評量考生能否由 a_1 、 b_1 的值推得 a_{100} 、 b_{100} 之值，此題的解法有二。

解法一：先求出 $a_1 = \frac{2}{3}$ 、 $b_1 = \frac{1}{3}$ 後，再由

$$\begin{bmatrix} a_{100} \\ b_{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{100} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{99} \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{3}{4} & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}^{99} \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} = \dots = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix} \text{ 推得}$$

$$\begin{bmatrix} a_{100} \\ b_{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}。$$

解法二：利用 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (且 $x, y > 0, x + y = 1$)，求出當 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ 時，矩陣 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}$ 乘以 $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$

仍為 $\begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ，故 $\begin{bmatrix} a_{100} \\ b_{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ 。

表六、數學乙非選擇題第二題第(2)小題作答情形統計

第二題第(2)小題作答類型	人數	百分比
未答	387	55.2%
有寫一些跟答案無關的內容，可看出不知該如何作答	122	17.4%
完全正確。先算出 $a_1 = \frac{2}{3}$ 與 $b_1 = \frac{1}{3}$ 後，再推論出 $a_{100} = \frac{2}{3}$ 、 $b_{100} = \frac{1}{3}$	38	5.4%
完全正確。先算出 $a_2 = \frac{2}{3}$ 與 $b_2 = \frac{1}{3}$ ，再推論出 $a_{100} = \frac{2}{3}$ 、 $b_{100} = \frac{1}{3}$	33	4.7%
完全正確。有以文字說明，因現穩定狀態，再得出 $a_{100} = \frac{2}{3}$ 、 $b_{100} = \frac{1}{3}$	34	4.9%
完全正確。利用 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ (且 $x, y > 0, x + y = 1$)，求出 $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$ ，故 $\begin{bmatrix} a_{100} \\ b_{100} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{3} \\ \frac{1}{3} \end{bmatrix}$	9	1.3%
無任何文字說明，直接寫出 a_{100} 與 b_{100} 之值	36	5.1%
一開始就算錯 $a_1 = \frac{2}{3}$ 與 $b_1 = \frac{1}{3}$ 之值	32	4.6%
其他	11	1.6%

由表六可知在第(2)小題有五成五的考生一字未寫，另有 17.4% 的考生寫了與答案無關的內容，可看出不知該如何作答。由此可知，第(2)小題有七成多的考生不知該如何下筆作答。另有 5.1% 考生直接寫出 $a_{100} = \frac{2}{3}$ 、 $b_{100} = \frac{1}{3}$ 之值，因無任何推論過程或理由，故無法得分。

在利用法一求解的考生中，有 10.1% 的考生會先算出 a_1 、 b_1 或 a_2 、 b_2 ，接著再推論出 a_{100} 、 b_{100} 之值；但用法二求解的考生中，則有 1.3% 的考生會以該方法正確求解。此外，另有 4.9% 的考生則是以文字說明因呈現穩定狀態，故可得 $a_{100} = \frac{2}{3}$ 、 $b_{100} = \frac{1}{3}$ ，以上幾種做法皆可得滿分。不過令人

感到惋惜的是，有 4.6% 考生一開始知道須求 a_1 與 b_1 之值卻算錯，以致無法得分。至於其他錯誤情況，有考生會將 $\begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ 以 $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ 表示，進而求解，但因 $\begin{bmatrix} a_{11} & b_{12} \\ a_{21} & b_{22} \end{bmatrix}$ 之值錯誤，因此無法得分。

第(3)小題欲評量在第二輪操作後 A 瓶溶液中有百分之多少的酒精，求酒精溶液百分比；須先將 A 瓶中的酒精量算出後，再算出 A 瓶溶液中酒精所佔的比例為何，即可得到該小題的滿分。

表七、數學乙非選擇題第二題第(3)小題作答情形統計

第二題第(3)小題作答類型	人數	百分比
未答	335	47.8%
有寫一些跟答案無關的內容，可看出不知該如何作答	145	20.7%
完全正確，即先算出 A 瓶中的酒精量為 $\frac{11}{16} \times \frac{2}{3}$ ，再算出 A 瓶的酒精比例為 $\frac{11}{16}$ (或 68.75%)	52	7.4%
完全正確，以操作說明求解，如： 操作第一輪，B 瓶有 50% 酒精，A 瓶有 75% 酒精 操作兩輪後，B 瓶有 62.5% 酒精，A 瓶有 68.75% 酒精	44	6.3%
算出 $\begin{bmatrix} \frac{11}{16} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{16} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$ 後，就直接以矩陣中之 a_{11} 說明酒精比例為 $\frac{11}{16}$	4	0.6%
僅算對 A 瓶中的酒精量為 $\frac{11}{16} \times \frac{2}{3}$	3	0.4%
直接把 A 瓶中的酒精量 $\frac{11}{24}$ 當成酒精比例	11	1.6%
$\begin{bmatrix} \frac{11}{16} & \frac{5}{8} \\ \frac{5}{16} & \frac{3}{8} \end{bmatrix}$ 算錯造成答案錯	18	2.6%
操作說明求解，答案錯	58	8.3%
其他	46	6.6%

由表七可知，在第(3)小題中有 47.8% 考生未答，另有 20.7% 的考生寫一些和答案無關的內容，但可看出不知該如何作答。由此可知，約有 68.5% 的考生不知該如何作答。在這小題中約有 13.7% 的考生完全作對，其中有 7.4% 考生先算出 A 瓶中的酒精量，再求 A 瓶的酒精比例，有 6.3% 考生是以操作方式求解，先操作第一輪，得 A 瓶有 75% 酒精，再操作第二輪，A 瓶有 68.75% 的酒精。

在錯誤類型部分，有 0.6% 考生在算完 $\begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 4 & 2 \\ 1 & 1 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}^2 = \begin{bmatrix} 11 & 5 \\ 16 & 8 \\ 5 & 3 \\ 16 & 8 \end{bmatrix}$ 後，就直接將矩陣中的 $\frac{11}{16}$ ，當成 A 瓶溶

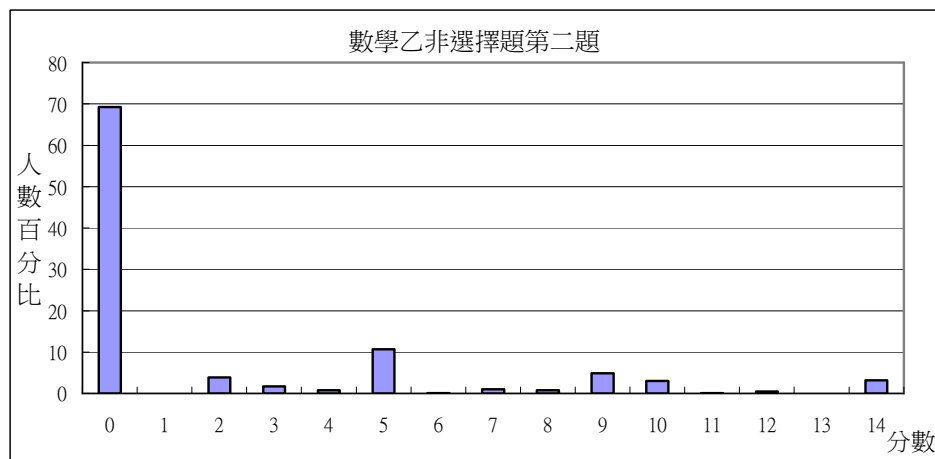
液中的酒精濃度，因而未寫出 A 瓶中的酒精量，以致無法得到此小題任何分數。類似地，亦有 1.6% 考生直接把 A 瓶中的酒精量 $\frac{11}{24}$ 寫成酒精比例，此類考生忽略酒精百分比濃度應為：

$\frac{\text{溶質(酒精)}}{\text{溶液(A瓶溶液)}} \times 100\%$ ，並非酒精量即為此溶液的酒精百分比濃度。此外，有 0.4% 的考生在解題

時把酒精百分比算錯，但因有將酒精量指出，亦可得到部分分數。不過，有 2.6% 的考生因將 $\begin{bmatrix} 11 & 5 \\ 16 & 8 \\ 5 & 3 \\ 16 & 8 \end{bmatrix}$

算錯，以致於酒精量與比例皆算錯，導致一分未得，實在非常可惜。

就非選擇題第二題而言，在表五中可看出，未答與寫一些與答案無關的內容之人數比例為 56.4%，表六這兩者的比例為 72.6%，表七這兩者的比例為 68.5%，可知在這三小題中，第(2)小題的推論對考生而言，是較難下筆作答的。又第二題的未答與寫一些與答案無關的比例較第一題來得高，使得這題的平均得分較第一題低。至於其他錯誤情況，考生因未將酒精量指出，故無法得分。



圖二、數學乙第二題的考生成績分布圖

圖二為數學乙全體考生非選擇題第二題成績分布圖，其中以 0、2、5、9、10、14 分者居多，可將各分數所對應的考生群區分如下：

得 0 分者：未答，或寫一些跟答案無關的內容。

得 2 分者：可寫出第(1)小題中 a_1 與 b_1 之值，但未能寫出正確二階方陣。

得 5 分者：僅寫對第(1)小題，但第(2)、(3)小題寫錯。

得 9 分者：僅寫對第(1)與第(2)小題。

得 10 分者：能寫對第(1)小題與第(3)小題，但第(2)小題未寫或寫一些與答案無關的內容。

得 14 分者：能正確求解第(1)、(2)、(3)小題。

由以上敘述可知，此題主要鑑別的考生能力群為 0、2、5、9、10、14 分。其中得零分的人數百分比約 69%，得 2 分的考生約 4%，得 5 分的考生約 11%，得 9 分的考生約 5%，得 10 分的考生約 3%，得 14 分的考生約 3%。

由今年數學乙非選擇題的平均得分來看，發現兩題的得分皆不高。不過，第一題雖評量二次多項式函數求極值，但屬基本概念並不難求解，且第(1)小題的計算僅為代值後求平均，應不難得分；第二題為矩陣的應用，其中第(1)小題僅評量考生能否以矩陣型式表達操作過程，結果發現仍有六成多的考生因無法以 a 、 b 型式寫出 a_1 與 b_1 之值，以致一分未得。可知考生對於文字轉化成數學式的能力尚待加強。建議考生平時解題時，應練習先仔細的閱讀題目，了解題意，無需急著問別人，也不要只求答案正確，應仔細寫下解題過程後，再藉由詢問同儕或教師，以瞭解錯誤之所在，如此一來才能真正強化自己閱讀及表達的能力。大考中心每年均會針對數學甲、數學乙的非選擇題答案卷進行抽樣，以進行作答類型分析，此舉是為瞭解考生在解題過程中所使用的概念與想法，進而從中發現考生可能的迷思與錯誤類型，以提供給高中教學上參與。此外，高中教師若對此分析有其教學上的其他看法，亦歡迎與我們分享。