

大學入學考試中心

101 學年度學科能力測驗試題

數學考科

—作答注意事項—

考試時間：100 分鐘

題型題數：單選題 7 題，多選題 6 題，選填題第 A 至 G 題共 7 題

作答方式：用 2B 鉛筆在「答案卡」上作答；更正時，應以橡皮擦擦拭，切勿使用修正液(帶)。未依規定畫記答案卡，致機器掃描無法辨識答案者，其後果由考生自行承擔。

選填題作答說明：選填題的題號是 A, B, C, ……，而答案的格式每題可能不同，考生必須依各題的格式填答，且每一個列號只能在一個格子畫記。請仔細閱讀下面的例子。

例：若第 B 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{18}}{\textcircled{19}}$ ，而依題意計算出來的答案是 $\frac{3}{8}$ ，則考生

必須分別在答案卡上的第 18 列的 $\begin{matrix} \square \\ 3 \end{matrix}$ 與第 19 列的 $\begin{matrix} \square \\ 8 \end{matrix}$ 畫記，如：

18	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
19	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

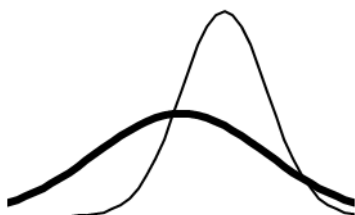
例：若第 C 題的答案格式是 $\frac{\textcircled{20}\textcircled{21}}{50}$ ，而答案是 $\frac{-7}{50}$ 時，則考生必須分別在答案卡的第 20 列的 $\begin{matrix} - \\ \square \end{matrix}$ 與第 21 列的 $\begin{matrix} \square \\ 7 \end{matrix}$ 畫記，如：

20	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>
21	1	2	3	4	5	6	7	8	9	0	-	±
	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input checked="" type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>	<input type="checkbox"/>

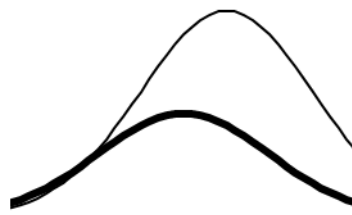
※試題後附有參考公式及可能用到的數值

4. 甲、乙兩校有一樣多的學生參加數學能力測驗，兩校學生測驗成績的分布都很接近常態分布，其中甲校學生的平均分數為 60 分，標準差為 10 分；乙校學生的平均分數為 65 分，標準差為 5 分。若用粗線表示甲校學生成績分布曲線；細線表示乙校學生成績分布曲線，則下列哪一個分布圖較為正確？

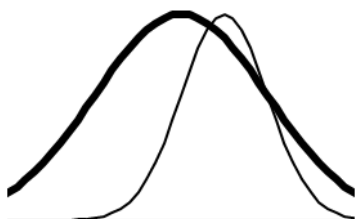
(1)



(2)



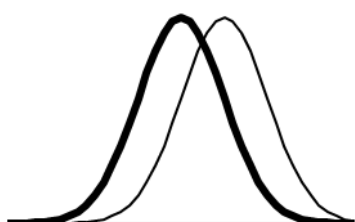
(3)



(4)



(5)



5. 若正實數 x, y 滿足 $\log_{10} x = 2.8$ ， $\log_{10} y = 5.6$ ，則 $\log_{10}(x^2 + y)$ 最接近下列哪一個選項的值？

(1) 2.8

(2) 5.6

(3) 5.9

(4) 8.4

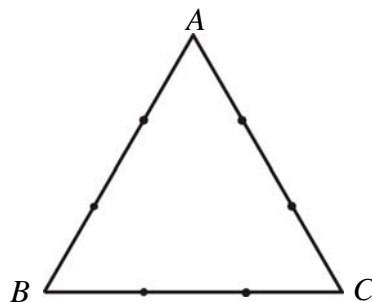
(5) 11.2

6. 箱中有編號分別為 $0, 1, 2, \dots, 9$ 的十顆球。隨機抽取一球，將球放回後，再隨機抽取一球。請問這兩球編號相減的絕對值為下列哪一個選項時，其出現的機率最大？
- (1) 0
(2) 1
(3) 4
(4) 5
(5) 9
7. 空間坐標中有一球面（半徑大於 0）與平面 $3x + 4y = 0$ 相切於原點，請問此球面與三個坐標軸一共有多少個交點？
- (1) 1
(2) 2
(3) 3
(4) 4
(5) 5

二、多選題（占 30 分）

說明：第 8 題至第 13 題，每題有 5 個選項，其中至少有一個是正確的選項，請將正確選項畫記在答案卡之「選擇（填）題答案區」。各題之選項獨立判定，所有選項均答對者，得 5 分；答錯 1 個選項者，得 3 分；答錯 2 個選項者，得 1 分；答錯多於 2 個選項或所有選項均未作答者，該題以零分計算。

8. 設 $f(x) = x^4 - 5x^3 + x^2 + ax + b$ 為實係數多項式，且知 $f(i) = 0$ （其中 $i^2 = -1$ ）。請問下列哪些選項是多項式方程式 $f(x) = 0$ 的根？
- (1) $-i$ (2) 0 (3) 1 (4) -5 (5) 5
9. 三角形 ABC 是一個邊長為 3 的正三角形，如下圖所示。若在每一邊的兩個三等分點中，各選取一點連成三角形，則下列哪些選項是正確的？
- (1) 依此方法可能連成的三角形一共有 8 個
(2) 這些可能連成的三角形中，恰有 2 個是銳角三角形
(3) 這些可能連成的三角形中，恰有 3 個是直角三角形
(4) 這些可能連成的三角形中，恰有 3 個是鈍角三角形
(5) 這些可能連成的三角形中，恰有 1 個是正三角形



10. 設 O 為複數平面上的原點，並令點 A, B 分別代表非零複數 z, w 。若 $\angle AOB = 90^\circ$ ，則下列哪些選項必為負實數？

- (1) $\frac{z}{w}$
- (2) zw
- (3) $(zw)^2$
- (4) $\frac{z^2}{w^2}$
- (5) $(z\bar{w})^2$ (其中 \bar{w} 為 w 的共軛複數)

11. 若實數 a, b, c, d 使得聯立方程組 $\begin{cases} ax+8y=c \\ x-4y=3 \end{cases}$ 有解，且聯立方程組 $\begin{cases} -3x+by=d \\ x-4y=3 \end{cases}$ 無解，則下列哪些選項一定正確？

- (1) $a \neq -2$
- (2) $c = -6$
- (3) $b = 12$
- (4) $d \neq -9$
- (5) 聯立方程組 $\begin{cases} ax+8y=c \\ -3x+by=d \end{cases}$ 無解

12. 在坐標平面上，廣義角 θ 的頂點為原點 O ，始邊為 x 軸的正向，且滿足 $\tan \theta = \frac{2}{3}$ 。若 θ 的終邊上有一點 P ，其 y 坐標為 -4 ，則下列哪些選項一定正確？

- (1) P 的 x 坐標是 6
- (2) $\overline{OP} = 2\sqrt{13}$
- (3) $\cos \theta = \frac{3}{\sqrt{13}}$
- (4) $\sin 2\theta > 0$
- (5) $\cos \frac{\theta}{2} < 0$

13. 平面上兩點 F_1, F_2 滿足 $\overline{F_1F_2} = 4$ 。設 d 為一實數，令 Γ 表示平面上滿足 $|\overline{PF_1} - \overline{PF_2}| = d$ 的所有 P 點所成的圖形，又令 C 為平面上以 F_1 為圓心、6 為半徑的圓。請問下列哪些選項是正確的？
- (1) 當 $d = 0$ 時， Γ 為直線
 - (2) 當 $d = 1$ 時， Γ 為雙曲線
 - (3) 當 $d = 2$ 時， Γ 與圓 C 交於兩點
 - (4) 當 $d = 4$ 時， Γ 與圓 C 交於四點
 - (5) 當 $d = 8$ 時， Γ 不存在

第貳部分：選填題（占 35 分）

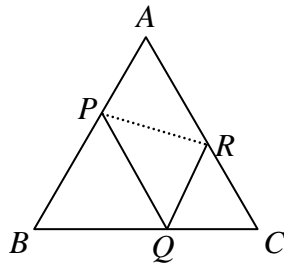
說明：1. 第 A 至 G 題，將答案畫記在答案卡之「選擇(填)題答案區」所標示的列號 (14–33)。
2. 每題完全答對給 5 分，答錯不倒扣，未完全答對不給分。

- A. 若首項為 a ，公比為 0.01 的無窮等比級數和等於循環小數 $1.\overline{2}$ ，則 $a = \underline{\textcircled{14} \cdot \textcircled{15} \textcircled{16}}$ 。
- B. 設 $A(1,1), B(3,5), C(5,3), D(0,-7), E(2,-3)$ 及 $F(8,-6)$ 為坐標平面上的六個點。若直線 L 分別與三角形 ABC 及三角形 DEF 各恰有一個交點，則 L 的斜率之最小可能值為 $\underline{\textcircled{17} \textcircled{18}}$ 。
- C. 小明在天文網站上看到以下的資訊「可利用北斗七星斗杓的天璇與天樞這兩顆星來尋找北極星：由天璇起始向天樞的方向延伸便可找到北極星，其中天樞與北極星的距離為天樞與天璇距離的 5 倍。」今小明將所見的星空想像成一個坐標平面，其中天璇的坐標為 $(9,8)$ 及天樞的坐標為 $(7,11)$ 。依上述資訊可以推得北極星的坐標為 $(\underline{\textcircled{19} \textcircled{20}}, \underline{\textcircled{21} \textcircled{22}})$ 。

D. 設點 $A(-2, 2)$ 、 $B(4, 8)$ 為坐標平面上兩點，且點 C 在二次函數 $y = \frac{1}{2}x^2$ 的圖形上變動。當 C 點

的 x 坐標為 2324 時，內積 $\vec{AB} \cdot \vec{AC}$ 有最小值 2526。

E. 在邊長為 13 的正三角形 ABC 上各邊分別取一點 P, Q, R ，使得 $APQR$ 形成一平行四邊形，如下圖所示：



若平行四邊形 $APQR$ 的面積為 $20\sqrt{3}$ ，則線段 PR 的長度為 27。

F. 設 m, n 為正實數，橢圓 $\frac{x^2}{m} + \frac{y^2}{n} = 1$ 的焦點分別為 $F_1(0, 2)$ 與 $F_2(0, -2)$ 。若此橢圓上有一點 P 使

得 ΔPF_1F_2 為一正三角形，則 $m = \underline{28}$ 29， $n = \underline{30}$ 31。

G. 坐標空間中，在六個平面 $x = \frac{14}{13}$ ， $x = \frac{1}{13}$ ， $y = 1$ ， $y = -1$ ， $z = -1$ 及 $z = -4$ 所圍成的長方體上

隨機選取兩個相異頂點。若每個頂點被選取的機率相同，則選到兩個頂點的距離大於 3 之機率

為 $\frac{\underline{32}}{\underline{33}}$ 。(化成最簡分數)

參考公式及可能用到的數值

1. 一元二次方程式 $ax^2 + bx + c = 0$ 的公式解：
$$x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

2. 平面上兩點 $P_1(x_1, y_1)$ ， $P_2(x_2, y_2)$ 間的距離為 $\overline{P_1P_2} = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2}$

3. 通過 (x_1, y_1) 與 (x_2, y_2) 的直線斜率 $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$ ， $x_2 \neq x_1$

4. 首項為 a_1 ，公差為 d 的等差數列前 n 項之和為 $S = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} = \frac{n(2a_1 + (n-1)d)}{2}$

等比數列 $\langle ar^{k-1} \rangle$ 的前 n 項之和 $S_n = \frac{a(1-r^n)}{1-r}$ ， $r \neq 1$

5. 級數公式：
$$\sum_{k=1}^n k^2 = 1^2 + 2^2 + 3^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

6. 三角函數的和角公式： $\sin(A+B) = \sin A \cos B + \sin B \cos A$

$$\cos(A+B) = \cos A \cos B - \sin A \sin B$$

7. $\triangle ABC$ 的正弦定理： $\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R$ ， R 為 $\triangle ABC$ 的外接圓半徑

$\triangle ABC$ 的餘弦定理： $c^2 = a^2 + b^2 - 2ab \cos C$

8. 棣美弗定理：設 $z = r(\cos \theta + i \sin \theta)$ ，則 $z^n = r^n(\cos n\theta + i \sin n\theta)$ ， n 為一正整數

9. 算術平均數： $M(=\bar{X}) = \frac{1}{n}(x_1 + x_2 + \cdots + x_n) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$

(樣本) 標準差：
$$S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (x_i - \bar{X})^2} = \sqrt{\frac{1}{n-1} ((\sum_{i=1}^n x_i^2) - n\bar{X}^2)}$$

10. 95% 信心水準下的信賴區間：
$$\left[\hat{p} - 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}}, \hat{p} + 2\sqrt{\frac{\hat{p}(1-\hat{p})}{n}} \right]$$

11. 參考數值： $\sqrt{2} \approx 1.414$ ， $\sqrt{3} \approx 1.732$ ， $\sqrt{5} \approx 2.236$ ， $\sqrt{6} \approx 2.449$ ， $\pi \approx 3.142$

12. 對數值： $\log_{10} 2 \approx 0.3010$ ， $\log_{10} 3 \approx 0.4771$ ， $\log_{10} 5 \approx 0.6990$ ， $\log_{10} 7 \approx 0.8451$